515.223
H67m

UNIVERSITY OF ILLINOIS
LIBRARY

BOOK CLASS VOLUME
~~518.1~~ H 67m
515.223

NOTICE: Return or renew all Library Materials! The *Minimum* Fee for each Lost Book is $50.00.

The person charging this material is responsible for its return to the library from which it was withdrawn on or before the **Latest Date** stamped below.

Theft, mutilation, and underlining of books are reasons for disciplinary action and may result in dismissal from the University.
To renew call Telephone Center, 333-8400

UNIVERSITY OF ILLINOIS LIBRARY AT URBANA-CHAMPAIGN

FEB 17 2000

OCT 29 RECD

L161—O-1096

Methodik

der

stetigen Deformation von zweiblättrigen Riemann'schen Flächen.

Ein Uebungsbuch

für den geometrischen Teil der Funktionentheorie.

Von

Fritz Hofmann.

Mit vielen in den Text eingedruckten Figuren.

Halle a. S.
Verlag von Louis Nebert.
1888.

Das Recht der Uebersetzung in fremde Sprachen bleibt vorbehalten.

515.223
H67m

Vorwort.

Das nachfolgende Werkchen möchte als „Ergänzung“ zu den gebräuchlichen Lehrbüchern der Funktionen-Theorie angesehen werden und in diesem Sinne seine Beurteilung finden. Es behandelt in möglichst erschöpfender Darstellung einen eng begrenzten, aber deswegen nicht weniger wichtigen, Teil der Theorie der Funktionen, nämlich die „Umformung von *Riemann*schen, sich selbst durchkreuzenden, Flächen in handliche, der Vorstellung zugänglichere, Formen ohne Selbstdurchsetzungskurven.“

Es sei gleich hier ausdrücklich erwähnt, dass wohl so Manches vom Inhalte des Nachfolgenden auch im mündlichen Vortrag des akademischen Lehrers, der gerade Funktionentheorie behandelt, gleichfalls schon oft Erwähnung fand; aber eben alles das, was der Vortrag nur andeuten kann — ohne dass es immer möglich wäre, alle Zwischenstadien der Entwicklung durch vollständig ausgeführte Figuren zu illustrieren —, soll im Nachfolgenden in bequemer und übersichtlicher Weise für den Leser fixiert sein, so dass ihm also (was der rasch gehende Vortrag kaum gewähren kann noch soll) ermöglicht wäre, sich jene Umformungen deutlich und anschaulich zu machen — dadurch, dass

71948

er die successive Entstehung aller wichtigen Flächentypen durch alle Zwischenmomente der Umformung gewissermassen vor seinen Augen vor sich gehen sieht.

Demnach kann das Schriftchen auch dem Lehrer einen Dienst erweisen, indem es ihn der Ausführung aller eigentlich nötigen Zwischenfiguren überhebt und ihm ermöglicht, wegen alles dessen, was über Deformation der vorkommenden Flächen zu sagen wäre, geradezu auf die hier gegebene ausführliche Darstellung zu verweisen.

Vorausgesetzt wurde beim Leser die Vertrautheit mit dem Begriffe der *Riemann*'schen Flächen, ferner mit dem der Querschnitte und Rückkehrschnitte auf allgemein gestalteten Flächen — über welche Dinge die bekannten Werke von *Durège* und *Neumann**) besonders zur Orientierung geeignet sind.

Und indem die nachfolgende Schrift den Leser solche *Riemann*'sche Flächen umformen lehrt in Flächen von übersichtlicher Gestaltung, auf welchen „geschlossene, aber nicht begrenzende" Kurven, wie etwa die Breiten- und Meridian-Kurve eines Ringes, auftreten, soll sie sein Auge üben, solche Kurven auch direkt auf vorgegebenen *Riemann*'schen Flächen zu erblicken. Von hier an wird es dann Aufgabe des weiter gehenden Lehrbuchs der Funktionen-Theorie sein: mit Hilfe der neu gewonnenen Vorstellungen

---

*) *Durège*, Elemente der Theorie der Funktionen. — *Neumann*, Vorlesungen über Riemanns Theorie der Abel'schen Integrale.

für solche „geschlossene, aber nicht begrenzende“ Kurven der *Riemann*'schen Fläche zu erweisen, dass die ihnen entlang erstreckten Integrale nicht mehr verschwinden, und so die fundamentalen Lehrsätze über die Perioden der zu den Integralen gehörigen Funktionen zu entwickeln.

Das Werkchen ist als „Uebungsbuch“ bezeichnet worden, weil der Gebrauch desselben sich wohl am erspriesslichsten erweisen dürfte, wenn der Leser sich die kleine Mühe nicht verdriessen lässt, einige der wichtigeren Figuren selbst zu entwerfen, oder für die perspektivisch gezeichneten Figuren sich körperliche Modelle herzustellen.

Die möglichst ausführlich gewählte Sprechweise des Nachfolgenden bedarf wohl kaum der Entschuldigung: der Verfasser durfte nirgends ohne weiteres irgend eine Ausgangsfigur identisch nennen mit dem letzten Stadium ihrer Entwickelung und etwa diese einfache Aussprache bereits als genügend und beweiskräftig erachten. Im Gegenteile musste die gewissenhafte und umständliche Erklärung aller dazwischen liegenden Vorgänge die Hauptrolle spielen und am meisten Berücksichtigung finden, denn sie ist es ja, was der Leser eigentlich vom Buche verlangt und erwartet. — Für die Mitteilung des wichtigen Citats in der Note von pag. 22 bin ich einem Münchener Gelehrten zu speciellem Danke verpflichtet.

München, im Sommer 1887.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichniss.

		Seite
	Einleitung	1
§ 1.	Umstülpung einer Kugel	6
§ 2.	Kugel mit Oeffnung	8
§ 3.	Kugel mit 2 Oeffnungen (Röhre)	12
§ 4.	Geschlossene, doppelwandige, Flächen	14
§ 5.	*Riemann*'sche Fläche mit einem Verzweigungsschnitt	16
	Anm. 1. Ueberschreitung des unendlich fernen Punktes bei der Bewegung einer geschlossenen Kurve	19
	Anm. 2. Nochmals der Verlauf einzelner Kurven auf einer Fläche während deren Umstülpung	20
§ 6.	Transformation des Ringes	22
§ 7.	Fläche der hyperelliptischen Funktionen. Zugehörige *Riemann*sche Fläche	23
§ 8.	*Klein*'sche Modifikation der *Riemann*'schen Fläche	27
§ 9.	Singuläre geschlossene Kurven, Anwendung auf die Topologie	29
	Anwendung auf die Funktionentheorie	31
§ 10.	Weitere Beispiele von singulären Kurven und Umformungen	33
	Anm. 1. Ausbreitung eines punktierten Ringes auf die Ebene	35
	Anm. 2. Weiteres Beispiel einer singulären Kurve	37
§ 11.	Zusammenfassendes Beispiel	38
§ 12.	Ueber unilaterale Flächen; Lösung des in der Einleitung gestellten Hauptproblems	41

Druckfehler.

Seite 9: Die Bezeichnungen der Figg. 4 und 5 sind zu vertauschen.
Seite 11, Z. 5 v. oben: statt *R* lies *U*.
Seite 43, Z. 6 v. u. lies *Liouville* statt *Lionville*.

Einleitung.

Den Gegenstand der folgenden Untersuchungen bilden topologische Beziehungen von „Flächen“ zu einander, d. h. von zweidimensionalen Punktkontinuen.

Für diese Flächen sollen folgende Eigenschaften vorausgesetzt werden: wir denken sie uns erstens als nach allen Richtungen dehnbar, so dass beispielsweise eine Kreisfläche übergeführt werden kann in ein Rechteck oder auch in eine Kugelfläche mit einer Randöffnung; sie sollen zweitens nicht zerreissbar sein, so dass eine Röhre etwa — Fläche mit zwei Grenzkurven — nicht ohne weiteres, d. h. nicht ohne etwaige (ausdrücklich zu erwähnende) Zerschneidung, in ein Rechteck übergeführt werden kann; hiermit ist auch gesagt, dass solche Flächen ihre ursprüngliche Anzahl von Randkurven bei jeder Verzerrung beibehalten; sie sollen aber drittens die den materiellen Flächen innewohnende Eigenschaft der Undurchdringbarkeit (impenetrabilitas) nicht besitzen, derart, dass man den Flächen Selbstdurchdringungs-Kurven erteilen (und wegnehmen) kann; nach der Herstellung einer solchen Selbstdurchdringungskurve sollen aber die auf dieser Kurve gelegenen Punkte der Fläche genau so wieder mit ihren Nachbarpunkten zusammenhängen, wie sie es vor der Herstellung jener Kurven gethan.

Diese Flächen können unbegrenzt (Kugel, Ring), oder begrenzt gedacht werden (Rechteck); es sei gleich bemerkt, dass alle unbegrenzten Flächen, d. h. Flächen ohne Randkurven, nicht immer verschiedene Seiten besitzen (die durch verschiedene Färbung unterschieden werden könnten), aber doch immer die Eigenschaft aufweisen, den Raum in zwei Teile zu

teilen in der Art, dass ein Punkt der einen Hälfte (ausserhalb gelegener Punkt) mit einem Punkte der zweiten Hälfte (innerer Punkt) nie verbunden werden kann, wenn das Ueberschreiten der Fläche nirgend gestattet ist. Die Bezeichnungen „ausserhalb“ und „innerhalb“ sind a priori willkürlich, etwa wie „rechts“ und „links“.

Wir wollen nun in Bezug auf unsere Flächen noch die Beschränkung hinzufügen, dass viertens auch alle betrachteten Flächen immer zwei verschiedene Seiten haben sollen, und schliessen also alle Flächen ohne diese Eigenschaft (vergleiche wegen eines Beispiels für solche Flächen: *Neumann,* Riemann's Theorie der Abel'schen Funktionen, 2. Auflage, S. 167—168) von unseren Betrachtungen aus.*)

Ein Beispiel für solche Flächen von allen diesen geforderten Eigenschaften sind die bekannten, von *Riemann* eingeführten Flächen, welche Selbstdurchsetzungkurven, Verzweigungsschnitte genannt, aufweisen; wir wollen uns im nachfolgenden auf sogenannte „zweiblättrige“ Flächen dieser Art beschränken. Solchen „*Riemann*'schen Flächen“ verschaffen wir dadurch die Eigenschaft einer unbegrenzten und dabei zwei Seiten besitzenden Fläche, dass wir sie uns denken als unendlich weit auf der Ebene der Zeichnung nach allen Richtungen sich erstreckend, sodann um einen, etwa kreisförmigen, Rand in unendlicher Entfernung herum zunächst nach unten und hierauf nach innen umgebogen, schliesslich aber in der Richtung senkrecht unter der Zeichnungsebene halbkugelförmig sich zusammenschliessend. (Vergl. die Figuren 19, 22, 31, 39, 42, 50, 52, 65, 69.)

Was die Terminologie im folgenden anlangt, so schien es uns am einfachsten, mit dem Ausdrucke „*Riemann*'sche Flächen“ nur Flächen der eben beschriebenen Art zu bezeichnen, d. h. „zweiblättrige unbegrenzte Flächen, die, jedes Blatt für sich, im Unendlichen durch einen Punkt geschlossen sind und zugleich Selbstdurchdringungskurven aufweisen“; mit „Fläche“ schlechthin bezeichnen wir überhaupt alle Gebilde, welche den eingangs geforderten Bedingungen genügen: Kugel, Ring, Kugel mit Henkeln u. s. w. Wir sprechen den „*Riemann-*

*) In § 12 ist eine Methode für die systematische Bildung von „unilateralen“ Flächen angedeutet.

schen Flächen" jene oben geforderten Eigenschaften zu, haben sie demnach als besondere Modifikationen eines allgemeineren Gebildes anzusehen.

Kürzer: „jene 'Flächen', welche zugleich zweiblättrig sind (zwei sehr nahe untereinander hin verlaufende Teile aufweisen), sowie geschlossen, aber auch gleichzeitig Selbstdurchdringungskurven besitzen, seien zur Abkürzung '*Riemann*sche Flächen' genannt."

Zweck des Nachfolgenden soll nun sein: „einfache Methoden anzugeben, nach welchen eine *Riemann*'sche Fläche durch stetige Verzerrung identisch gemacht werden kann mit anderen, besonders charakteristisch gestalteten, 'Normalflächen', von einer solchen Beschaffenheit, dass sich auf ihnen die Untersuchung von topologischen Fragen besonders übersichtlich gestaltet; für welche insbesondere jener den *Riemann*'schen Flächen anhaftende missliche Umstand wegfällt, dass die geometrische Vorstellung durch das Auftreten der Selbstdurchdringungskurven gehindert wird"; d. h.: wir wollen Methoden angeben, nach welchen „Flächen mit Selbstdurchdringungskurven in stetiger Weise, allein durch Verzerrung, verwandelt werden können in Flächen ohne solche Kurven."

Zweitens gedenken wir auch jene Aufgabe zu lösen, die gewissermassen die Umkehrung dieses eben genannten Problems bildet: „Methoden anzugeben, welche eine direkte Umwandlung einer beliebig vorgegebenen geschlossenen Fläche in eine *Riemann*'sche (doppelblättrige) Fläche gestatten."

Als Beispiele der soeben erwähnten „Normalflächen" (auf deren Herstellung also im allgemeinen hingearbeitet werden soll) mögen die Figuren 18, 23, 36, 37, 44, 51, 57, 63, 68 dienen; ihre Gestalt ist etwas verschieden von der gewöhnlich hier gegebenen „Kugel mit Henkeln" (vgl. *Klein*: Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Funktionen, 1882, S. 26—28), wie sie unsere Figur 61 aufweist, sowie verschieden von den „Halbringkörpern", wofür Figg. 32, 60, 74 als Beispiele dienen mögen. Warum wir speziell diese Form ins Auge fassen — während doch ihr Unterschied von den beiden eben ge-

nannten „Normalflächen-Typen“ kein wesentlicher ist —, wird der Verlauf der nachfolgenden Betrachtungen darthun; doch sei vorgreifend erwähnt, dass sie in der Entwicklung der „*Riemann*schen Flächen“ mit Verzweigungsschnitten bis zu den „halbringförmigen“ Figuren hin etwa die Mitte bezeichnen, in der Weise, dass man durch einen ganz besonders einfachen und direkten Prozess von ihnen zu jenen „*Riemann*'schen“ Flächen mit Verzweigungsschnitten gelangen kann, wie auch anderseits zu den „gehenkelten Flächen-Typen“.

Stellt sich nun die topologische Untersuchung irgend einer Frage als leichter durchführbar und übersichtlicher heraus auf jenen „Normalflächen“ (Figg. 18, 23, 36, 37, 44, 51, 57, 63, 68), als auf den „Kugeln mit Henkeln“, so ist der Weg, von ihnen ausgehend, rückwärts zu den *Riemann*'schen Flächen um die Hälfte abgekürzt worden, wenn man diese „Normalflächen“ zur Durchführung jener Untersuchung in der That benutzt hat und nunmehr von ihnen aus die Interpretation des Resultats auf der „*Riemann*'schen“ Fläche herzustellen sucht.

Um also das, was wir für unsere Terminologie gesagt haben, deutlicher zu machen und zu ergänzen: Wir unterscheiden in dem Entwicklungsprozesse eines Körpers drei wesentliche Momente: die durch eine Beschreibung (Kugel, Ring u. s. w.) allgemein charakterisierte Fläche, ferner die soeben genannte „Normalfläche“, deren Definition sich am Schlusse des § 7 findet, drittens die zu dieser Fläche gehörige, einzige, *Riemann*sche Fläche; wobei eben letztere Bezeichnung von uns der bequemen Sprechweise wegen eingeführt wurde. Als Beispiel diene Fig. 30, 36, 31 (oder 31 a). Fig. 30 stellt die allgemein beschriebene Fläche vor; Fig. 36 ist die zugehörige Normalfläche; Fig. 31 oder die damit identische Fig. 31 a die zugehörige *Riemann*'sche Fläche.

Doch legen wir speziell auf die Herstellung gerade dieser „Normalflächen“ und ihre definitive Gestaltung nicht die Betonung — der Wert der nachfolgenden Betrachtungen soll vielmehr nur gefunden werden in der Angabe jenes der Vorstellung zugänglichen und dem Gedächtnisse leicht sich einprägenden Prozesses, welcher aus einer „*Riemann*'schen“ Fläche mit einem Schlage alle Verzweigungsschnitte gleichzeitig entfernt.

Es sei noch hervorgehoben, dass alle unsere Umformungen rein geometrisch, graphisch, sein werden und sich — stetig — gewissermassen vor unseren Augen vollenden, dagegen an keiner Stelle auf „Abbildungen“ beruhen. Wenn wir beispielsweise zwei Flächen oder zwei auf ihnen entsprechend verlaufende Kurven identisch nennen, so ist damit immer gemeint, dass wir die stetige Umwandlung des einen Gebildes in das andre vollständig, in allen Stadien, kontrollieren und fixieren können; ganz im Gegensatze zu sogenannten „Abbildungs“-Methoden, die algebraische Formeln als Werkzeug und Mittelglied aufweisen. Bei letzteren Methoden — so streng und rasch fördernd sie auch sein mögen — muss man mit dem von den Formeln fertig gelieferten Resultate, der neuen Fläche, vorlieb nehmen, ohne dass man sich immer eine Vorstellung bilden kann, wie denn eigentlich der ganze Weg aussieht, den die Flächen und die auf ihnen verlaufenden Kurven zurücklegten vom Anfangs- bis zum Endstadium.

1.

Wir kommen zunächst auf die eingangs aufgestellte dritte Forderung zurück, dass nämlich bei der Umgestaltung unserer Flächen dieselben als „nicht mit der Eigenschaft der Undurchdringbarkeit behaftet“ vorgestellt werden sollen. Diese Eigenschaft von unsern Flächen zu fordern, dazu nötigte die Absicht und die Richtung unserer Untersuchungen; wir untersuchen die beiden Arten von Fragen: „enthält eine Fläche von angegebener Gestalt geschlossene Kurven, die sich auf keinen Punkt zusammenziehen lassen?“ und „kann man Kurven angeben, längs welcher zerschnitten die Fläche von ihrem Grade von Kompliziertheit verliert?“; zur Beantwortung solcher Fragen verschafft uns jene Voraussetzung über die Natur unserer Flächen eine grössere Freiheit der Bewegung.

Aber auch die Rechtfertigung und der Beweis für die logische Zulässigkeit jener Forderung liegt in der Angabe jener beiden Untersuchungsrichtungen ausgesprochen, wenn wir hinzufügen, dass wir uns eben auf jene beiden Fragen topologischer Natur zu beschränken gedenken. Wir brauchen nur zu erwägen, dass durch eine Durchbiegung einer Fläche durch sich selbst die Lagenverhältnisse der auf ihr verschiebbaren Kurven (zur Fläche und auf der Fläche unter sich) keine Aenderung erfahren, so dass also die Anwendung der Durchbiegungsoperation niemals zu einem Schlussfehler Veranlassung geben kann (wenn anders dieser Schluss sich auf die beiden oben genannten Fragen beschränken will).

Beispielsweise soll also die Fläche der Figur 1 direkt übergeführt werden können in die Fläche der Figur 2, indem man den bei *A* befindlichen Teil des Ringes unter den drunter liegenden Teil hinunterbiegt, durch letzteren hindurch. Es ist

evident, dass in Beziehung auf manche topologische Verhältnisse die beiden Flächen 1 und 2 wesentlich verschieden sind (1 bildet einen unauflösbaren, 2 einen auflösbaren Knoten); sie sind aber identisch, so lange nur speziell die beiden oben erwähnten Fragen für sie beantwortet werden sollen. Den Beweis für letztere Behauptung liefert wohl am besten eine Beobachtung der Lagenverhältnisse auf beiden Flächen, wenn man sich den Uebergang von 1 nach 2 stetig ausgeführt denkt.

Fig. 1.

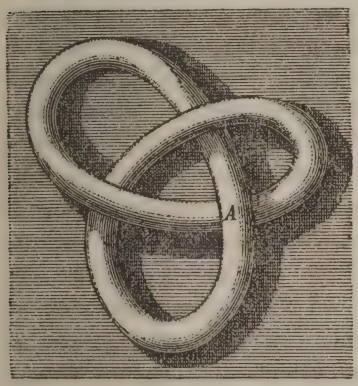
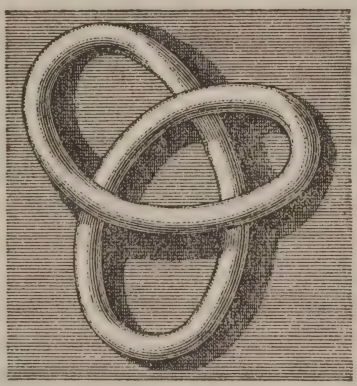


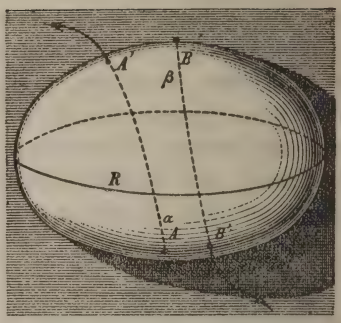
Fig. 2.



Als wichtigste und im nachfolgenden fortwährend verwendete Operation haben wir nunmehr die „Umstülpung“ hier zu besprechen, nachdem für deren Möglichkeit das Vorhergehende den Beweis erbracht hat.

Es sei eine geschlossene, kugelartige Fläche vorgelegt (Fig. 3), auf welcher wir, nach dem in der Einleitung Gesagten, zwei verschiedene Seiten, eine innere (schwarz gefärbte) und eine äussere (farblose), unterscheiden können. Wir denken uns eine Aequatorkurve auf dieser Fläche, *R*, als absolut im Raum festgelegt, etwa als körperlichen Draht — zugleich aber die dehnbare Fläche fest mit dieser Kurve verbunden; dagegen seien die beiden Hälften des Körpers ober- und unterhalb dieser Kurve frei beweglich (dehnbar und durch einander durchziehbar). Ein Faden sei bei *A* derart an der unteren Hälfte befestigt, dass die untere Flächenhälfte bei einer nach oben gerichteten Bewegung des Fadens zu folgen genötigt ist; zu-

Fig. 3.



gleich sei ein andrer Faden an der obern Hälfte so befestigt, dass diese obere Hälfte einer Bewegung des Fadens nach unten folgen muss; die Richtungen beider Fäden seien die durch die Pfeile α, β der Figur markierten. Ziehen wir nun gleichzeitig vermittelst des Fadens A die untere Hälfte aufwärts, ebenso die obere abwärts in der Richtung der Pfeile, so bleibt nach der Voraussetzung die Randkurve R von dieser Bewegung unberührt. Es wird sich bei genügender Fortsetzung der Bewegung von selbst dabei eine Durchdringungskurve der beiden Flächenhälften einstellen müssen, die aber den „Zusammenhang" der Fläche nicht ändert, da längs derselben keinerlei Verbindung zwischen den beiden Flächenhälften stattfindet. Führt man den Prozess soweit, bis die obere Hälfte der Figur genau die Lage der unteren Hälfte eingenommen hat und umgekehrt, so zeigt die Fläche ihrer Form nach keinerlei Umgestaltung an, nur ist eben die innere (schwarze) Seite nach aussen gekehrt worden, zugleich die äussere (weisse) Seite nach innen: die ganze Fläche ist „umgestülpt" worden.

Sobald es gelungen ist, sich die Durchführbarkeit und die Wirkung dieses Prozesses vorzustellen, sind im wesentlichen die Schwierigkeiten gehoben, die im nachfolgenden überhaupt auftreten.

2.

Die kugelförmige Fläche der Figur 4 besitze eine kleine Randkurve U; wir erkennen die Gestalt eines Sackes mit trompetenförmigem Ansatze; die Oeffnung CD ist unendlich schmal zu denken. Zwei einander optisch (und räumlich) gegenüberliegende Punkte auf dieser Oeffnung CD (die beiden Stellen ϱ etwa, wo die beiden Pfeile $\mu\,\nu$ vom Ansatze auf die Kugel übergehen) sind dann auf der Fläche selbst nicht unendlich

benachbart, sondern vollständig geschieden — wie auch die körperliche Anschauung leicht zeigen mag —; denn beim Oeffnen eines Sackes werden zwei Punkte, die zufällig auf der von der Schlussstelle gebildeten Selbstberührungskurve CD einander gegenüber liegen, sofort wieder vollständig getrennt erscheinen.

Fig. 5.

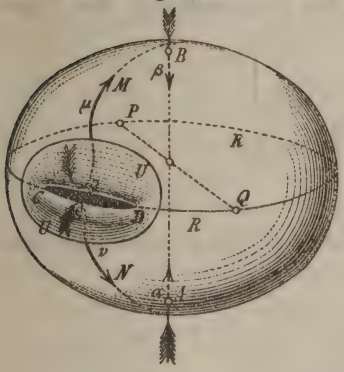
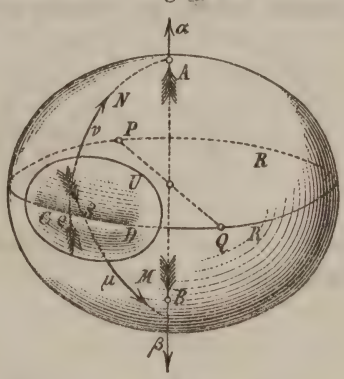


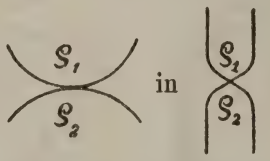
Fig. 4.



Wir halten nun die Aequatorkurve R, ferner die Umfangskurve fest, schliesslich noch den ganzen Teil der Fläche von der Umfangskurve U bis zur Oeffnung CD; wir fragen uns nach den Vorgängen, die durch eine „Umstülpung" des Sackes veranlasst werden, d. h. durch eine Bewegung der beiden Kugelhälften in der Richtung der Pfeile $\alpha\beta$.

Die Figur 5 mag zur Versinnlichung des Schlussresultates dienen. Die Pfeile μ und ν haben die in dieser Figur gegebene Lage angenommen, die Punkte A und B haben ihre Lagen vertauscht — was aber wichtig ist: in der Nähe der unendlich schmalen Oeffnung CD ist eine Selbstdurchdringungskurve (Verzweigungsschnitt) CD aufgetreten. Wir wollen keinen eigentlichen Beweis für diese Behauptung geben, da wir uns — wie im folgenden durchweg — nur an die geometrische Vorstellung wenden, die eben das zuletzt Gesagte als richtig erkennen lassen muss. Doch sei zur Erleichterung empfohlen, sich einen Augenblick die unendlich schmale Oeffnung CD der Figur 4 ganz zu einer mathematischen Linie zusammengezogen zu denken, hierauf einen Punkt dieser Linie, ϱ, sich doppelt zu markieren: einmal mit einem Index, der ihn als

der oberen Hälfte zugehörig erkennen lässt, und mit einem zweiten, der ihn als einen Punkt der unteren Hälfte charakterisiert. Bleibt dann bei der „Umstülpung“ die Randkurve U erhalten, so liegt auch später der doppelt bezeichnete Punkt ϱ an derselben Stelle des Raumes und gehört beiden Kugelhälften an, ohne dass etwa letztere bei ϱ zusammenhingen. Da aber nunmehr die beiden Flächenhälften ihre Lage vertauscht haben, so erkennen wir die Umgestaltung der Figur



welch' letztere eben von dem Verzweigungsschnitte eine Seitenansicht giebt.

Fig. 6.

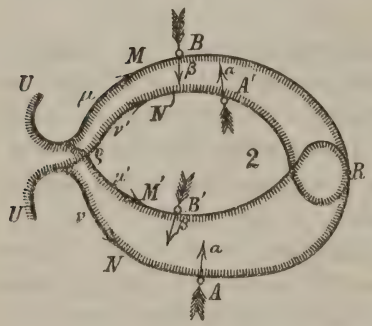
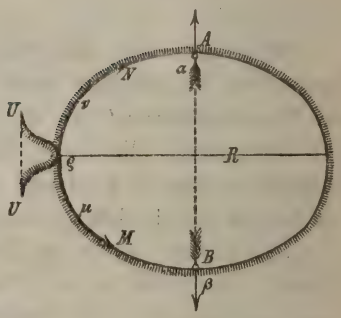


Fig. 7.



In Figur 6 erscheint die Fläche der Figuren 4 und 5 nach der Ebene AB, $\mu\nu$ aufgeschnitten, und zwar stellt sie zwei verschiedene Stadien des „Umstülpungs-Prozesses“ dar — die Anfangslage, sowie eine Mittellage. In letzterer sind sich die Punkte A und B bereits begegnet; die beiden Flächenhälften sind bereits zum Teile durcheinander durchgezogen, so dass im Innern ein linsenförmiger Körper 2 entstand; auch vom Verzweigungsschnitte findet sich bei ϱ die Andeutung. Der Körper 2 kehrt bereits die frühere „innere“ Seite (die gefärbte) nach aussen.

In Figur 7 erscheint der Prozess beendigt: der linsenförmige Körper 2 hat bereits ganz den Platz der früheren Kugel eingenommen und kehrt die früher innen gelegene Seite nach aussen; der Verzweigungsschnitt ist bei ρ fixiert, die Umfangskurve R hat sich nicht geändert.

Fig. 8.

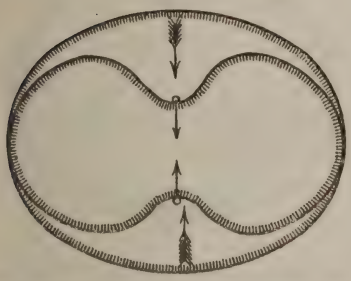


Fig. 9.

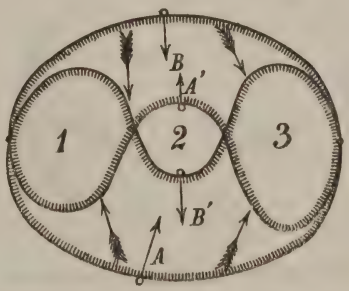
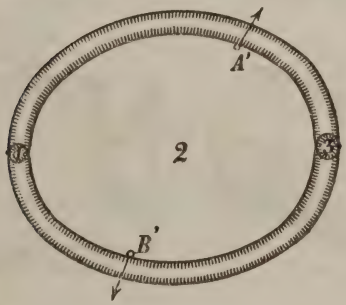


Fig. 10.



Die Figuren 8—10 erläutern nochmals die Vorgänge im Innern der Fläche bei ihrer Verzerrung. Sie stellen den Schnitt der Fläche vor nach der Ebene AB, PQ (Fig. 4). Die Fig. 9 zeigt zum ersten Mal das Auftreten des linsenförmigen Körpers 2, der schliesslich (Fig. 10) die frühere Kugel verdrängt die ringförmige Fläche 1 (3) verschwindet schliesslich gleichzeitig.

In den Figuren 6—10 wurde die gefärbte Seite durch besondere Schraffierung ausgezeichnet, so dass die „Umstülpung" dem Auge sichtbar gemacht werden konnte.

3.

Dieser Prozess kann verallgemeinert werden für Kugeln mit mehreren Randkurven, welch' letztere angebracht erscheinen auf trompetenartigen Fortsetzungen der Kugel nach aussen hin

Fig. 11.

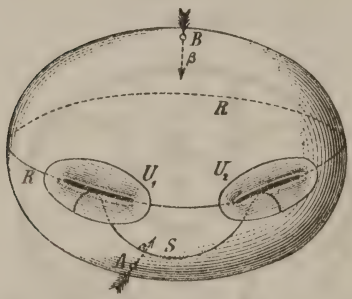
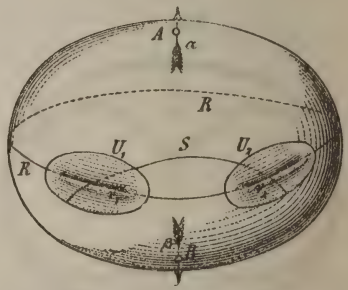


Fig. 12.



(Fig. 11). In Fig. 11 erscheint gleichzeitig eine auf der Fläche verlaufende Kurve S eingezeichnet, welche bei der „Umstülpung" (Fig. 12) teilweise ihre Lage ändern muss und nur auf den er-

Fig. 13.

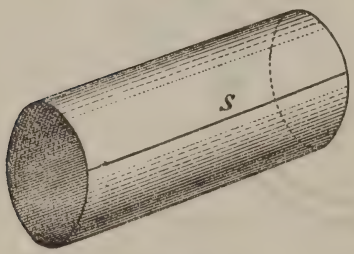


Fig. 14.

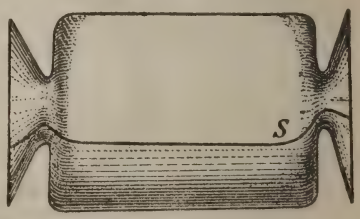


Fig. 15.

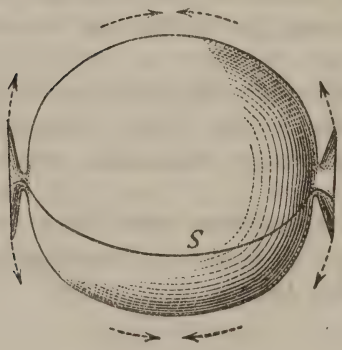
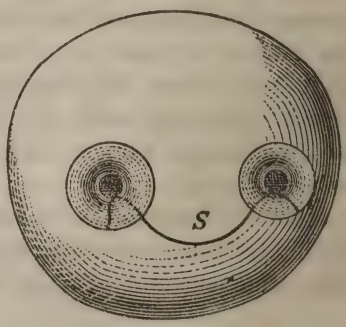


Fig. 16.



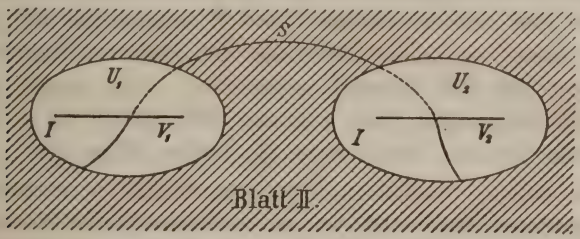
wähnten Ansätzen, zwischen $U_1 U_2$ und den Verzweigungsschnitten $V_1 V_2$, ihre frühere Lage beibehalten konnte.

Es ist nicht schwierig, sich vorzustellen, wie aus einer Röhre mit zwei Randkurven (Fig. 13) allmählich durch Verzerrung die Figur 11 und damit auch die Fläche mit Verzweigungsschnitten der Figur 12 entstanden gedacht werden kann (Figg. 13—16).

Indem wir der „Röhre" der Figur 13 zwei Verengerungen geben, erhalten wir die Figur 14, welche durch Wölbung des mittleren Teils eine „Kugel mit zwei Ansätzen" liefert (Fig. 15); eine Verschiebung der Oeffnungen auf dieser Kugel giebt die Figur 16, welche durch ein Zusammenziehen der beiden runden Oeffnungen zur Spalt-Form mit Figur 11 identisch wird. Demnach ist die „Röhre" der Figur 13 identisch (in topologischem Sinne) mit dem „Sacke mit 2 Oeffnungen" der Figur 11, demnach auch mit der „umgestülpten" Fläche in Figur 12.

Anmerkung. Eine auf der Röhre (13) gezogene Kurve S, die die beiden Ränder verbindet, hat offenbar die Eigenschaft, dass bei einem Zerschneiden ihrer Länge nach die Röhre sich in ein Rechteck verwandelt; demnach hat auch die Kurve S der Figuren 11 und 12 diese Eigenschaft.

Fig. 17.



Stellt also die Figur 17 eine unserer früher definierten *Riemann*'schen Flächen vor, auf welcher aber vom oberen Blatte alle Teile entfernt sind bis auf zwei ellipsenförmige Stücke, derart, dass das zweite — in der Tiefe kugelförmig geschlossene — Blatt fast vollständig sichtbar wird (II), so sieht man, dass diese *Riemann*'sche Fläche — mit zwei Verzweigungsschnitten $V_1 V_2$, sowie ausnahmsweise mit 2 Randkurven versehen — durch einen einzigen, von Rand zu Rand laufenden Schnitt (Querschnitt) S in ein Rechteck verwandelt werden kann.

4.

Von diesen kugelförmigen Flächen mit Randöffnungen und Ansätzen gehen wir weiter zu geschlossenen Flächen von der Art der Figur 18: Doppelkugeln, die eine Anzahl von Oeffnungen aufweisen (CD und EF in Figur 18), durch welche die

Fig. 18.

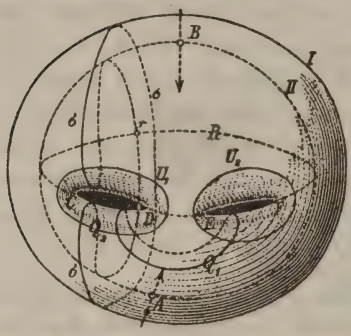
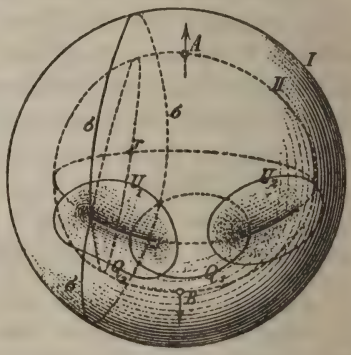


Fig. 19.



beiden Kugelflächen zu einer einzigen, unbegrenzten Fläche vereinigt werden. (Die Fläche der Figur 18 ist, wir wiederholen es, eine unbegrenzte und geschlossene; den Raumteil zwischen den beiden Schalen I und II nennen wir den inneren Teil; er hängt an keiner Stelle mit den äusseren Raumpunkten [in Bezug auf die Fläche] zusammen. Der bei B auf die Fläche II aufgesetzte Pfeil ragt mit der Spitze ins Aeussere der Fläche hinaus; vergl. noch die beiden Figg. 20.)

Wie solche Flächen mit unseren bisher betrachteten zusammenhängen, kann man sich auf zweierlei Weise klar machen: man kann entweder (Fig. 18) die geschlossene Doppelkugel mit 2 Umfangskurven auf dem Blatte I versehen ($U_1 U_2$) und die ganze Fläche I wegnehmen bis zu den Kurven U hin — wir werden dann die Figur 11 entstehen sehen —; oder man kann umgekehrt in der Figur 11 oder für eine damit identische Figur (15 etwa) die trompetenförmigen Ansätze sich wachsend denken über ihre ursprüngliche Randkurve hinaus in der Richtung der Pfeile in Figur 15, bis die Ränder zusammenstossen und so die geschlossene Fläche der Figur 18 ergeben.

Jedenfalls bildet also der von $U_1 U_2$ begrenzte Teil der Fläche 18 (die Fläche II mit den Randkurven) genau wieder die Figur 11, und man kann auf diesen Teil der geschlossenen Doppelkugel 18 den Prozess der „Umstülpung“ anwenden. Die Fläche I bleibt hierbei an derselben Stelle, ebenso alle auf ihr verlaufenden Kurven; anders ist es aber mit Kurven wie Q_1, welche teilweise der Fläche I und teilweise der Fläche II angehören; wie diese Kurve Q_1 sich vor und nach der „Umstülpung“ dem Auge darstellt, ist am besten direkt aus den Figuren 18 und 19 zu entnehmen. Die Figuren 20 und 21 illustrieren den Vorgang im Innern der geschlossenen Doppelkugel, durch einen Schnitt, welcher so gelegt gedacht ist, dass er Nord- und Südpol der Figg. 18, 19 verbindet, dabei aber über die eine oder die beiden Verzweigungsschnitte hinweggeht. Statt diese Verhältnisse nochmals zu besprechen, dürfen wir wohl ohne weiteres auf die Figuren 6 und 7 und das dort Gesagte verweisen. Die Figuren 20 und 21 unterscheiden sich von 6 und 7 nur durch das Auftreten der Kugelhülle I; die schraffierten Teile der Figuren 20a — 21b erklären wiederum, in welcher Weise die umgestülpten Teile der Doppelkugel entgegengesetzte Bezeichnungen bekommen in Bezug auf „äussere“ oder „innere“ Begrenzung des Raumes — gegenüber den ursprünglich vorgegebenen und bei der Umstülpung verdrängten Teilen von II.

Fig. 20a.

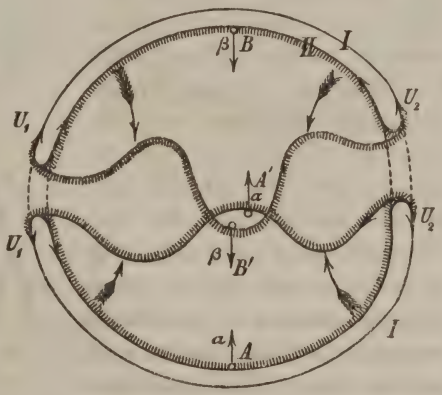
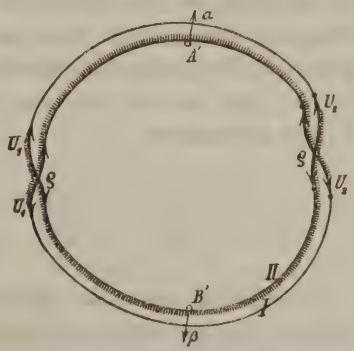


Fig. 21a.



Mit der Beschreibung dieses „Umstülpungsprozesses“, an-

gewendet auf geschlossene Flächen vom Typus der Doppelkugeln mit Verbindungsöffnungen (Fig. 11), haben wir die Darstellung der Methode erledigt, die wir im Nachfolgenden fast ausschliesslich anwenden und als wirksam erkennen werden, um auch *Riemann*'sche Flächen beliebigen Zusammenhangs in — so zu sagen — mehr körperhafte, jedenfalls aber der Anschauung und der Diskussion mehr zugängliche Formen umzugestalten. Als Beispiele von solchen Umgestaltungen erwähnen wir die Figuren: 18, 19; 23, 22; 36, 31; 37, 39; 44, 50; 57, 58; 63, 65, aus welchen die Verallgemeinerung nicht schwierig zu gewinnen sein dürfte. Diese Figuren erscheinen paarweise zusammengehörig; immer wird aus der einen Fläche, der *Riemann*'schen, durch die aufs zweite Blatt angewendete Umstülpung der ganze Verein von Selbstdurchdringungskurven (Verzweigungsschnitten) mit einem Schlage entfernt, und so der für die Vorstellung zugänglichere zweite Typus gewonnen.

Fig. 20 b.

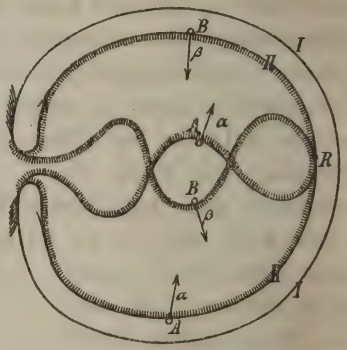
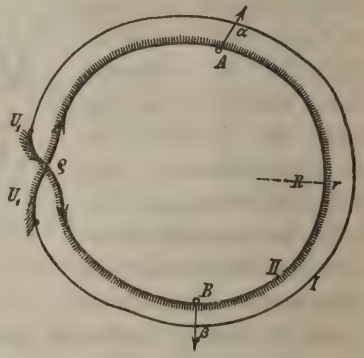


Fig. 21 b.



5.

Nachdem nun die Methode erörtert ist, wollen wir die Lösung der in der Einleitung gestellten allgemeinen Probleme vorbereiten durch möglichst eingehende Diskussion der Umwandlungen, wie sie für die einfachsten *Riemann*'schen Flächen nötig sind. Wir behandeln die den folgenden Körpern ent-

sprechenden *Riemann*'schen Flächen: Kugeltypus, „Ring"-Typus (Fläche der elliptischen Funktionen), „Dreihalbringe"-Typus oder auch „Kugel mit zwei Henkeln"-Typus (Fläche der hyperelliptischen Funktionen).

Fig. 22.

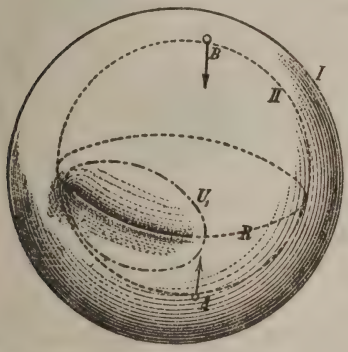
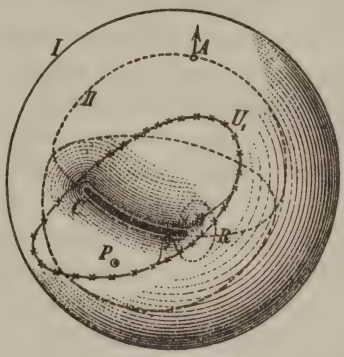


Fig. 23.



Aufgabe. Eine *Riemann*'sche Fläche mit einem Verzweigungsschnitte (Fig. 22) zu verwandeln in eine Doppelkugel mit *einer* Oeffnung, durch stetige Verzerrung.

Wir denken uns in Figur 22 die Aequatorkurve der zweiten Kugelschale II als absolut fest, ebenso eine in der Nähe des Verzweigungsschnittes verlaufende Kurve U_1 auf dem Blatte I. Auf die Kugel II wenden wir dann den genügend erklärten Prozess des „Umstülpens" an, wie er aus den Richtungen der eingezeichneten Pfeile sich erklärt. Die Fläche I, das äussere Blatt, erleidet hierbei keinerlei Aenderung bis in die unmittelbare Nachbarschaft des Verzweigungsschnittes; nur wird letzterer selbst nach Beendigung des Prozesses sich aus einer „Selbstdurchsetzungskurve" in eine „Selbstberührungskurve" umgewandelt haben. Letztere, eine begrenzte Strecke vorstellend, längs deren die Fläche sich selbst berührt, wurde in Figur 23 ersetzt durch eine schmale Oeffnung CD, da es anders nicht möglich gewesen wäre, den Verlauf und die Krümmung der benachbarten Flächenteile deutlich zu zeichnen und von der Lage in Figur 22 zu unterscheiden. Die Kurve R ist hierbei an ihrer Stelle geblieben; die Punkte A und B haben — gegen Figur 22 verglichen — ihre Lagen vertauscht.

Indem wir die „Verbindungsöffnung“ CD der Figur 23 öffnen zu einer regelmässigeren, kreisförmigen Gestalt, erhalten wir einen Flächentypus (24), wie ihn herbeizuführen wir uns eigentlich vorgenommen hatten — das erste Beispiel der später noch häufig auftretenden „Normalflächen“: eine Doppelkugel, deren beider Blätter durch eine röhrenformige Oeffnung stetig verbunden sind, derart, dass diese Doppelkugel eine unbegrenzte, geschlossene Fläche bildet. Diese Zahl 1 (eine Verbindungsöffnung) können wir als ein topologisches Charakteristikum der Fläche auffassen — wie man sonst die Anzahl der zur Vereinfachung der Fläche nötigen Querschnitte wählt, oder die Zahl der auf eine Kugel zur Flächenbildung aufgesetzten Henkel, oder die Anzahl gewisser, durch topologische Beziehungen zur Fläche ausgezeichneter Kurvensysteme.*)

Fig. 24.

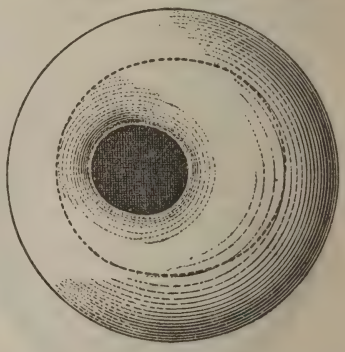
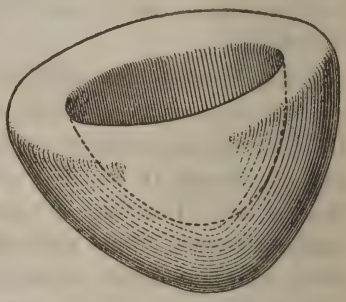


Fig. 25.



Wir denken uns dann aus der Fläche Fig. 24 eine Scheibe gebildet (Fig. 25 giebt eine dazwischen liegende Bildung), die man leicht zu einer Kugel umformen kann, und wir hätten somit die Identität der mit einem Verzweigungsschnitte versehenen *Riemann*'schen Fläche (Figur 22) mit einer Kugelfläche gezeigt.

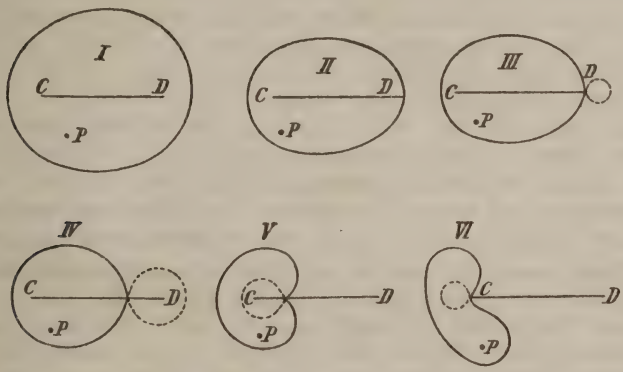
---

*) *Riemann*, Grundlagen für eine allgemeine Theorie . . . ., Werke pag. 11; Theorie der Abel'schen Funktionen, Werke pag. 85—86. — *Neumann*, Vorlesungen über Riemanns Theor., II. Aufl., pag. 154. — *Klein*, Ueber Riemanns Theorie der algebr. Funkt., pag. 25—28. — *Königsberger*, Vorlesungen über Theor. der ellipt. Funkt., pag. 53. — *Durège*, Einl. in die Theorie der Funktionen, Kap. IX. — Ferner noch: *Lippich*, Untersuchungen über den Zusammenhang, Math. Ann. VII.

Die Figur 24 nimmt eine Mittelstellung ein in der Entwicklung von „*Riemann*'scher Fläche" bis „Kugel"; es sei ausdrücklich nämlich bemerkt, dass von ihr aus der Uebergang zur *Riemann*'schen Fläche schon so weit vorbereitet ist, dass es nur noch einer einzigen Operation bedarf, um letztere *Riemann*'sche Fläche auftreten zu sehen; anderseits ist ihre Umwandlung in die Kugel leicht zu übersehen.

Anmerkung 1. Wie nun diese „Normalfläche" (24) oder die nicht wesentlich verschiedene Fig. 23 ebensogut wie die Kugel selbst geeignet ist, um über das Verhalten von gewissen, auf der Kugel angebbaren Kurven zu orientieren, möge die folgende Ueberlegung zeigen.

Fig. 26.



„Wie ist der Vorgang zu erklären, durch welchen auf einer *Riemann*'schen Fläche mit einem Verzweigungsschnitte (Fig. 26) eine geschlossene Kurve wie U_1 um einen Punkt in der Lage wie P zusammengezogen wird?"

Diese Frage muss natürlich beantwortet werden können, da ja eine solche *Riemann*'sche Fläche nach dem Vorhergehenden in topologischer Hinsicht genau wie eine Kugel sich verhält; wir wollen gleich hier die vollständige Beantwortung der in den obigen Worten gestellten Frage bringen (Fig. 26).

Wir ziehen die Kurve bis zum Endpunkte D zusammen, ziehen hierauf eine kleine Schleife beim Punkte D in das untere Blatt hinein (III). Diese Schleife können wir die in Nr. IV gegebene Gestalt annehmen lassen; alsdann wollen wir dieselbe eine Schwenkung über den in der Tiefe unter der Zeichnungsebene gelegenen, unendlich fernen Punkt des zweiten Blattes hinweg machen lassen (wir bleiben dabei mit der Schleife vollständig auf dem nach unten gerichteten, halbkugel-

förmigen, Abschlusse des zweiten Blattes), so dass nach dieser Schwenkung die Schleife bei C in Nr. V wieder im Endlichen erscheint; von hier aus ist es dann nicht mehr schwierig, in der Lage von Nr. VI die noch im zweiten Blatte befindliche Schleife heraus (beim Punkte C) und dann die ganze Fadenkurve um den Punkt P herum zusammen zu ziehen.

Im Uebergange von Nr. IV zu Nr. V liegt eine grosse Schwierigkeit für die geometrische Vorstellung; unsere Figur 23 gestattet uns nun aber, den Verlauf der Bewegung des Fadens auf der übersichtlicheren Fläche ohne Selbstdurchdringungskurve leicht zu verfolgen und damit alles das oben Gesagte gewissermassen glaubhafter zu machen.

Auf dieser Figur 23 ist es nicht schwierig sich den Faden U_1 bei D auf die Fläche II hinübergezogen zu denken, so dass er auf dieser zweiten Kugelschale eine kleine Schleife bildet, die bei D mit dem auf dem äusseren Blatte befindlichen Fadenteile zusammenhängt; wir können dann mit jenem auf die Fläche II hinübergezogenen Teile des Fadens U_1, jener Schleife, um die Höhlung der Fläche vollständig herum wandern, derart, dass der auf II verlaufende Teil bei der Stelle C wieder schliesslich herausgezogen werden kann — die Uebergangsstellen y der Schleife über den Spalt können unterdessen allmählich nach links gerückt sein —; und nunmehr wird die auf I verlaufende Fadenkurve die Oeffnung CD gar nicht mehr enthalten, wohl aber P immer noch einschliessen.

Denkt man sich aber an jeder Stelle dieser mit dem Auge zu verfolgenden Bewegung von U_1 auf der Fläche Fig. 23 die „Umstülpung“ ausgeführt, so erhält man die entsprechenden Lagen auf der *Riemann*'schen Fläche der Figur 26, welche somit vollständig erklärt ist. Der der Vorstellung schwierige „Uebergang über den unendlich fernen Punkt“ erscheint hierbei ganz einfach als ein Passieren der tiefsten Stelle der inneren Kugelschale II in Fig. 23.

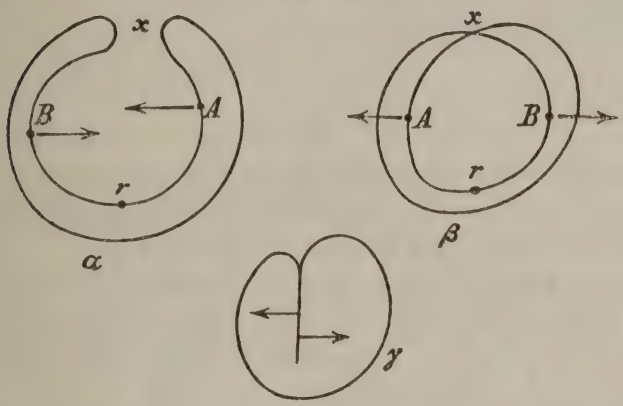
Anmerkung 2. Es mag hier die passende Stelle sein, zu besprechen, wie das bis jetzt Gegebene geeignet ist, die in den Lehrbüchern*) gegebene Darstellung solcher stetiger Umformungen in anschaulicher Weise zu ergänzen. Es werden beispielsweise an der in der Note angegebenen Stelle die beiden Figuren 27 α und β als durch stetige Verzerrung unmittelbar aus einander folgend angegeben, welche Figuren den Durchschnitt durch eine Fläche vorstellen, die in der Umwandlung von einer gewöhnlichen Kugelfläche in eine zweiblättrige Kugelfläche begriffen ist. Aber zwischen diesen beiden Figuren ist der Zusammenhang kein ganz evidenter. Die a. a. O. gegebene Bemerkung, dass eine Kurve von

---

*) Vergl. etwa: *Neumann*, Riemanns Theorie der Abel'schen Funktionen, 1. Auflage pag. 213; 2. Auflage pag. 70.

der Lage α in die Lage β durch stetige Umformung gebracht werden kann, gewährt erstens noch keinen Einblick in das, was mit der Fläche vor sich geht, die ja mit dieser Kurve fest verbunden ist, und anderseits ist selbst die stetige Ueberführung einer Kurve in einer Ebene, von der Lage α in die Lage β, nicht frei von Schwierigkeiten in ihrer Erklärung.

Fig. 27.



Denken wir uns eine körperliche Kurve, ein Haar etwa, in der Form α auf die Zeichnungsebene gelegt, so kann die Umwandlung in die Form β nur erfolgen, indem man die körperliche Kurve teilweise erhebt und im Raume über der Zeichnungsebene umwendet; dann ist es allerdings klar, dass die Projektion (der Schatten) dieser im Raume bewegten Kurve aus der Lage α stetig in β übergeht; es wäre aber eben immer noch ein besonders merkwürdiges Zwischenstadium dieser Schatten-Kurve hervorzuheben und einzufügen, um jenen Moment zu fixieren, wo sich jener Schatten des im Raume bewegten Haares zu einer Strecke (teilweise) verkürzt oder auf eine andre Weise einmal seinen Selbstdurchschneidungspunkt plötzlich gewinnt (Fig. 27 γ).

Stellt man sich nun aber noch vor — wie man es ja eigentlich thun muss —, dass mit jener im Raume bewegten Kurve eine Fläche fest verbunden ist, so scheint auch mit Aufstellung jener Zwischenform die Schwierigkeit nicht ganz gehoben, die für die geometrische Vorstellung einer derartigen Flächen-Umwandlung noch besteht. In der That ist nun aber, wenn die Fläche jene eben beschriebene Bewegung der räumlichen Kurve (von der Projektion α bis β) mitmachen will, ihre Umgestaltung genau das, was wir oben eine „Umstülpung“ nannten; und so mögen denn die letzten Paragraphen dazu gedient haben, um von dem, was man sich vorstellen sollte als zwischen den Figuren 27 α und β vorgehend, eine mög-

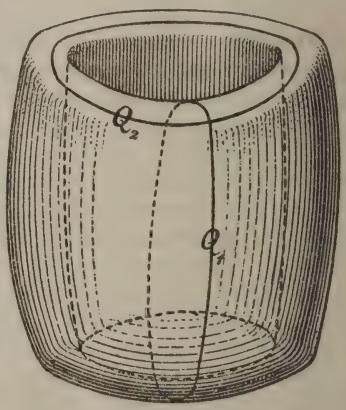
lichst deutliche Vorstellung zu geben. Diese bei *Neumann*, a. a. O., gegebenen Figuren 27 α und β sind ohne weiteres identisch mit unseren Figuren 20 b und 21 b; und eine auf solchen Flächen im oberen und unteren Teile gleichzeitig verlaufende, geschlossene Kurve (σ in Figg. 18, 19), die noch dabei den Verzweigungsschnitt überschreitet, wird bei unserer „Umstülpung" genau jenen Uebergang zeigen (vergl. Figg. 20 b und 21 b), wie ihn die Figuren des erwähnten Werkes aufweisen (Fig. 27 α und β).*)

6.

Aufgabe. Ein Ring soll direkt, durch stetige Verzerrung übergeführt werden in eine *Riemann*'sche Fläche mit zwei Verzweigungsschnitten.

Indem man die Dimensionen der Ringfläche wachsen lässt in der Richtung der Rotationsaxe des Ringes, erhält man einen fassähnlichen Körper (Fig. 28); drückt man diesen Körper in der Nähe der Kurve Q_1 zusammen, so erhält man die Fig. 29, an welcher nunmehr noch der hintere, plattenförmige, Teil zu wölben ist, um direkt die Doppelkugel der Figur 18 zu liefern. Ein Zusammendrängen der „Verbindungsöffnungen" CD u. EF zu „Strecken von Selbstberührungskurven" und eine „Umstülpung" des Blattes II in der Fläche 18 giebt als Resultat die Figur 19, welche ohne weiteres eine *Riemann*sche Fläche mit zwei Querschnitten vorstellt.

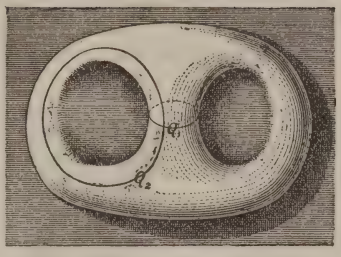
Fig. 28.



Auch diesmal nimmt die Figur der „Doppelkugel mit Verbindungsöffnungen" (18) die Mittelstellung in der Entwicklung

*) Vergl. wegen des bisher Gebrachten, sowie speziell wegen des Inhalts dieser Anmerkung die Darstellung von *Clifford*, Proceed. of the London math. Society, vol. 8, 1877, woselbst sich pag. 300 unser oben erklärter Prozess des „Umstülpens" ebenfalls erwähnt und beschrieben findet.

Fig. 29.



von 28 (über 29 und 18) bis 19 ein; sie lässt sich ebenso leicht in den Ring einerseits, wie in die *Riemann*'sche Fläche anderseits überführen; da sich nun das Studium von singulären Kurven, Q_1, Q_2, auf Figur 18 ebenso einfach gestaltet als auf dem Ringe selbst, so braucht man auch nicht bis zum Ringe selbst zu gehen, wenn es sich darum handeln sollte, die *Riemann*'sche Fläche in die übersichtlichere Gestalt einer Fläche ohne Verzweigungsschnitte zu bringen — man kann bei der „Normalfläche" 18 Halt machen.

Die Figur 18 zeigt so deutlich wie die Ringfigur Nr. 28, wie das Ziehen der Kurven Q_1 Q_2, sowie das Verbot, diese Kurven irgendwie zu überschreiten, keine geschlossene Kurve mehr zu ziehen gestattet, welche nicht ein Stück der Fläche herausschnitte. Denn soll überhaupt auf der Fläche 18 eine geschlossene Kurve kein Stück der Fläche vollständig begrenzen, so wäre dies nur denkbar, wenn die Kurve auf dem Blatte I oder II um eine der Oeffnungen *CD, EF* herumliefe, oder wenn sie nach Art der Kurve Q_1 selbst die beiden Oeffnungen verbände. Aber die Anschauung zeigt direkt, dass diese beiden Möglichkeiten ausgeschlossen sind, wenn es nicht mehr gestattet ist, Q_1 und Q_2 zu überschreiten.

7.

Aufgabe. Die Fläche der Figur 30 (Fläche der hyperelliptischen Funktionen) soll durch stetige Verzerrung direkt verwandelt werden in die *Riemann*sche Fläche mit 3 Verzweigungsschnitten der Figur 31 (31 a).

Zur Lösung des Problems denken wir uns den mittleren Teil von Fig. 30 enger gemacht (Fig. 32), hierauf das mittlere Verbindungsstück aus der Fläche der Zeichnung in Figur 32

heraus nach oben halbkreisförmig gekrümmt; wir erhalten so die Figur von 3 Halbringen, die in 2 Stellen des Raumes *A*

Fig. 30.

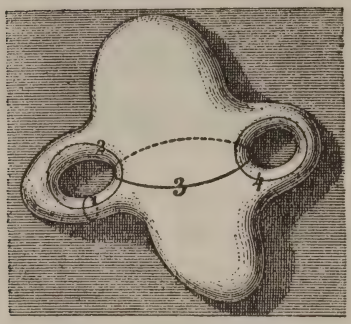


Fig. 31.

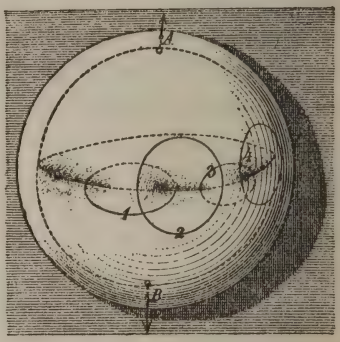
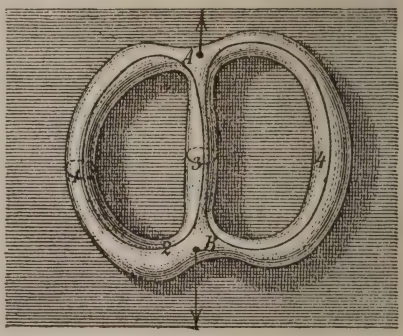


Fig. 31 a.

und *B* je drei von ihren 6 Endpunkten vereinigt aufweisen von oben betrachtet giebt dies die Figur 33.

Lassen wir einen dieser 3 Halbringe sich so verbreitern, dass derselbe schliesslich eine Halbkugel mit doppelter Wandung bildet, so erhält man eine Fläche, wie sie als Fig. 34 und 35 in verschiedenen Lagen abgebildet ist. Immer noch sind die 3 „Halbringe“ zu konstatieren, welche allerdings bereits die dazwischen freigelassenen Oeffnungen zu verengern beginnen.

Fig. 32.



Die daraus folgende Fig. 36 ist wieder eine unserer „Normalflächen; sie ist eine doppelblättrige, überall geschlossene Kugel mit 3 Verbindungsöffnungen, welche dafür sorgen, dass

das Blatt II stetig mit I zusammenhängt, und enthält keinerlei „Selbstdurchdringungskurven". Doch können die 3 kreisförmigen Oeffnungen der Figur 36 leicht zusammengedrückt werden zu

Fig. 33.

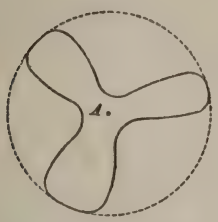
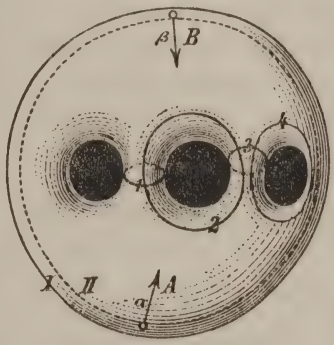


Fig. 34.

„Selbstberührungsstrecken", und ein „Umstülpen" des Blattes II in Fig. 36 liefert direkt die Normalfläche der Figur 31. Die Wirkung des Einzeichnens der Kurven 1, 2, 3, 4 — wenn wir an sie das Verbot knüpfen, dass eine weitere Kurve keine dieser vier Kurven überschreiten soll — dürfte hier auf der Fläche 36 entschieden einfacher zu diskutieren sein, als auf den ursprünglich vorgegebenen körperhaften Flächen 30 und 32

Fig. 35.

Fig. 36.

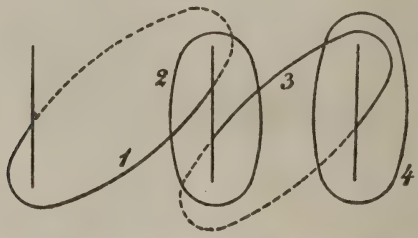


vom „Kugel mit Henkel"- resp. „Halbring"-Typus. Es ist direkt zu ersehen, wie nunmehr keine geschlossene Kurve mehr auf der Fläche 36 gezeichnet werden kann, die nicht die Fläche zerstückelte — demnach muss die Fläche 36, nach jenen vier eingezeichneten Kurven zerschnitten, sich in ein Rechteck verwandeln und hat also nach *Riemanns* Terminologie den Zusammenhang 5.*)

*) *Prym*, Neue Theorie d. ultra-ellipt. Funktionen, 2. Ausg., pag. 12.

Bei der Verzerrung von 36 nach 31 bilden sich diese vier Querschnitte in der angegebenen Weise um, so dass demnach ein „Querschnittsystem der *Riemann*'schen Fläche mit 3 Ver-

Fig. 31 b.

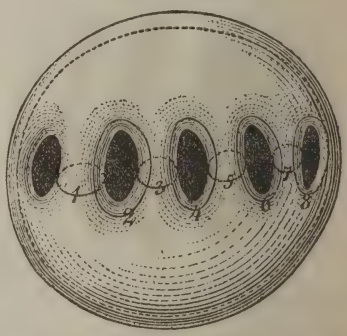


zweigungsschnitten" gefunden worden ist. Vgl. noch Fig. 31 b, in welcher die Querschnitte aus Figur 31 eingetragen wurden.

Es ist klar, wie man alle diese Dinge verallgemeinern kann — doch wollen wir hier abbrechen und an dieser Stelle nur noch endgültig die allgemein gültigen Eigenschaften der so oft erwähnten „Normalflächen" aufzählen.

Sie sind „Doppelkugeln, deren beide Blätter durch röhrenförmige Verbindungsstücke stetig verbunden sind, so dass die Flächen unbegrenzt (geschlossen) erscheinen. Die Zahl der auftretenden Oeffnungen ist gleich der Zahl der auf der vorgegebenen doppelblättrigen *Riemann*schen Fläche befindlichen Verzweigungsschnitte, und gleich der Anzahl von Halbringen, welche die ihnen topologisch zugeordnete Figur vom Typus Fig. 32 aufweist; die Anzahl dieser 'Verbindungsöffnungen' ist daher auch um 1 grösser als die Zahl von Henkeln, welche, auf eine Kugel aufgesetzt, die einer solchen Normalfläche zugeordnete Fläche bilden. Ihr Zusammenhang im *Riemann*'schen Sinn ist $2(n-1)+1$, wenn n die Zahl der Oeffnungen; womit denn auch gesagt ist, dass eine doppelblättrige *Riemann*sche Fläche mit n Verzweigungsschnitten vom selben Zusammenhange: $2(n-1)+1$ ist."*)

Fig. 37.



*) In Uebereinstimmung mit der Formel in *Neumann*, Vorlesungen

Schliesslich sei nochmals an einem Beispiele (Figg. 37—39) deren Verwendbarkeit zur effektiven Aufstellung von Querschnittsystemen demonstriert:

Fig. 38.

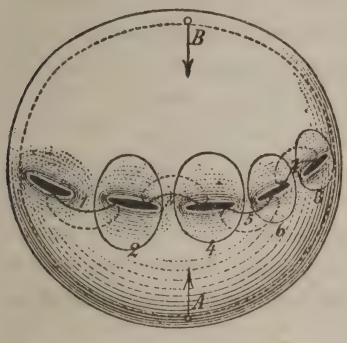
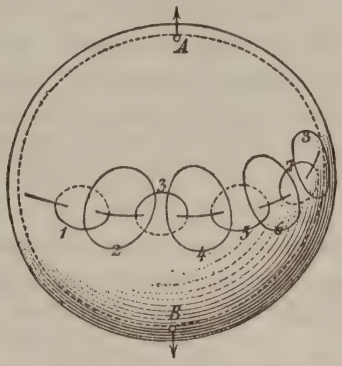


Fig. 39.



Zahl der Oeffnungen 5; daher Zusammenhang der *Riemann*'schen Fläche $2(5-1)+1=9$; Zahl der Verzweigungsschnitte der *Riemann*'schen Fläche 5; Zahl der Halbringe einer ihr entsprechenden, aus Halbringen zu bildenden Fläche $= 5$; Zahl der Henkel, welche, auf eine Kugel aufgesetzt, eine entsprechende (identische) Fläche erzeugen $= 4$.

8.

Es scheint passend, hier gleich die Verwendbarkeit dieser Flächenform zur Diskussion der *Klein*'schen „Modifikation der *Riemann*'schen Flächen"*) zu zeigen.

Die Figur 40 stelle eine doppelt gelegte Ebene vor, welche aber nur bis dorthin reicht, wo die Schraffierung beginnt, so dass demnach beide Blätter durch 4 Oeffnungen unterbrochen sind und sich nicht ins Unendliche erstrecken. An den 5 Randkurven sollen aber das obere und untere Blatt zusammen-

---

über Riemanns Theor. der Abel'schen Funkt., 2. Aufl., pag. 170; oder vergl. *Riemann*, Abel'sche Funktionen, Werke pag. 107.

*) *F. Klein*, Ueber eine neue Art der Riemann'schen Flächen, Math. Annal. 7, pag. 558; vergl. auch *Clebsch-Lindemann*, Vorles. über Geom., pag. 610—612.

hängen: beide Blätter zusammengenommen bilden demnach eine unbegreuzte Fläche. Die Figur 41 ist von der vorhergehenden nicht wesentlich verschieden; durch Abplattung, Verflachung der letzteren findet die Figur 40 ihre vollständigere Erklärung.

Handelt es sich nun darum, solche Flächen in zweiblättrige unbegrenzte Flächen mit Verzweigungsschnitten (was wir mit unserer speziellen Terminologie „*Riemann*'sche Flächen" nennen) zu verwandeln, so ist der Uebergang von der Fig. 41 zu einer unserer „Normalflächen" ein sehr einfacher. Wir denken uns die mittlere Partie der Fläche 41 festgehalten, dagegen die Randkurve allmählich aufwärts gebogen (so dass eine Schale mit 4 Löchern entstehen würde), von dieser Schale aber die obere Randpartie wieder nach innen zusammengezogen, so dass der obere Rand der Schale zu einer neuen (fünften)

Fig. 40.

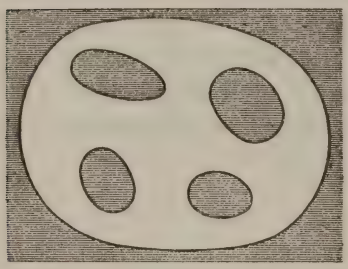
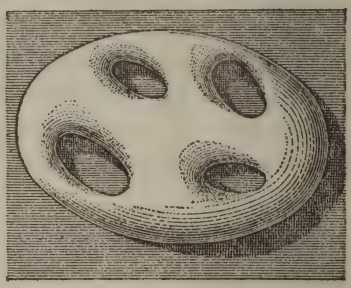


Fig. 41.



Oeffnung in der nunmehr entstehenden Doppelkugel Anlass giebt. So entsteht die Figur 37, und wir erkennen die vorgegebene Doppelfläche 40 als identisch mit der doppelblättrigen *Riemann*'schen Fläche 39 vom Zusammenhang $2(5-1)+1=9$, weil 5 Verzweigungsschnitte aufweisend.

Allgemein verwandelt sich eine *Klein*'sche geschlossene Doppelfläche von der Art der Figur 40, wenn sie n innere Oeffnungen aufweist, zunächst in eine „Normalfläche" mit $(n+1)$ Verbindungsöffnungen, d. h. in eine zweiblättrige *Riemann*'sche Fläche vom Zusammenhange $2n+1$ mit $(n+1)$ Verzweigungsschnitten.

Anmerkung. Demnach ist das bei *Clebsch-Lindemann* a. a. O. pag. 612 gegebene Beispiel vom Zusammenhang $2 \cdot 1 + 1 = 3$.

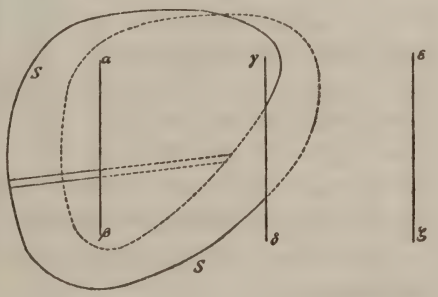
9.

Wir gedenken solche Normalfläche zu verwerten bei der Behandlung des folgenden Problems:

„Auf Flächen von höherem als Ring-Zusammenhang giebt es geschlossene Kurven, welche einen Teil der Fläche vollständig begrenzen und sich doch nicht in einen Punkt zusammenziehen lassen; es sollen solche Kurven auf den ihnen entsprechenden, von den Verzweigungsschnitten befreiten, Flächen aufgefunden*), ihren Lageverhältnissen nach diskutiert, und hierauf die gewonnenen Resultate auf die Figur der *Riemann*schen Fläche mit Verzweigungsschnitten zurück übertragen werden."

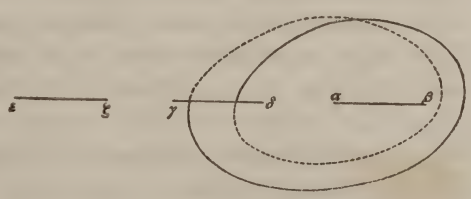
Wie überhaupt solche Kurven möglich sind, mögen die Figuren 42 darthun, wo die Kurve S auf einer *Riemann*'schen Fläche mit 3 Verzweigungsschnitten ein Gebiet vollständig begrenzt, ohne jedoch in einen Punkt zusammenziehbar zu sein. (Mit Hinweglassung des dritten, nicht umschlossenen, Verzweigungsschnittes wäre letzteres möglich; vgl. die nächsten Zeilen.)

Fig. 42 a.



Dass solche Kurven entstehen können und warum sie sich erst zeigen können bei Flächen von höherem Zusammenhang als dem der Ringfläche, vermag eine einfache geometrische Ueberlegung klar zu machen. Denken wir uns einen kreisförmig gebogenen Draht zunächst fest im Raum, so können wir nach 2 Richtungen hin (Fig. 43) Flächen anwachsen lassen,

Fig. 42 b.

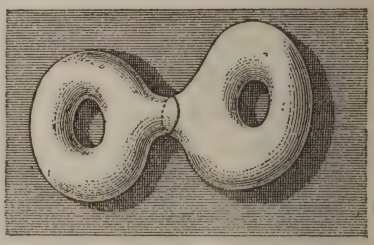


*) Dieselben sind bei *Klein*, Ueber Riemanns Theor. der algebraischen Funktion en, 1882, pag. 31, (am Schlusse) erwähnt.

welche — jede für sich — den Ring als einzige Grenzkurve aufweisen. Denken wir uns auf dem so entstandenen Körper jene vorgegebene kreisförmige Kurve wieder beweglich, so kann sie nicht, auf der Fläche verbleibend, in einen Punkt zusammengezogen werden. Aber sie trennt offenbar zwei verschiedene Hälften der Fläche vollständig von einander, nämlich die beiden an sie angesetzten Ringe, welche keine Verbindung zulassen als über jene Kurve hinweg.

Diese Konstruktion verlangt aber, um schliesslich solche Kurven wirklich zu liefern, dass nach jeder Seite des ursprünglich fest gegebenen Kreises eine Fläche von wenigstens Ring-Zusammenhang angesetzt wurde. Würde man, rechts etwa in Figur 43, eine Kugel angesetzt haben, so liesse sich die kreisförmige Kurve über diese hinweg in einen Punkt zusammenziehen. (Die Figur 43 ist übrigens mit der „Dreihalbring-Fläche“ (Figg. 30 und 31) der hyperelliptischen Funktionen identisch.)

Fig. 43.



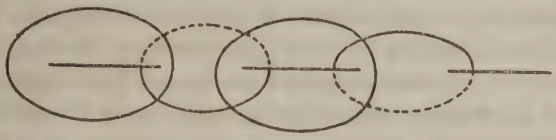
Diese Kurven sind zunächst für die Topologie der Flächen interessant.

Von *Riemann* wurde gelehrt, wie man eine vorgegebene Fläche von mehrfachem Zusammenhang in eine einfach zusammenhängende verwandeln kann durch Zerschneidung nach Querschnitten*); die Operation hat schliesslich die Absicht, sich — durch das somit wirksam gemachte Verbot, gewisse Linienzüge zu überschreiten — zu versichern, dass von allen auf einer vorgegebenen Fläche möglichen geschlossenen Kurvenzügen nur solche als einzig angebbar ausgeschieden werden, die einen Gebietsteil vollständig begrenzen. Dass nun aber diese Zerschneidungsmethode — in gewissem Sinne — in ihrer Wirkung über ihr Ziel hinausgeht, lehren die obigen Ueberlegungen; das Zerschneiden nach dem Querschnittsystem giebt uns allerdings die Gewissheit, dass nach Ausführung dieser Operation alle ge-

*) *Riemann,* Theorie der Abel'schen Funkt., Werke pag. 85 ff.

schlossenen Kurven auch ein Gebiet begrenzen: aber es lässt auch anderseits geschlossene Kurven verschwinden, welche ganz gut diese Eigenschaft der „Begrenzung“ besessen hätten.

Beispiel. In der zerschnittenen Fläche der hyperelliptischen Funktionen (Fig. 31 b, pag. 26) ist man allerdings sicher, dass jede geschlossene Kurve einen Gebiets-Teil vollständig begrenzt. Aber es sind auch durch diese Operation geschlossene Kurven beseitigt worden, die ebenfalls diese Eigenschaft besessen hätten — allerdings ohne auf einen Punkt zusammenziehbar zu sein. Beispielsweise kann man die „vollständig begrenzende“ Kurve S der Figuren 42 nicht mehr in die zerschnittene Fläche 31 b oder



einzeichnen. —

Was eine Anwendung des Vorhergehenden auf die Funktionen-Theorie anlangt, so existiert der folgende „Lehrsatz“:

„Ist eine Funktion f auf einem vollständig begrenzten Gebiete eindeutig, sowie nebst ihrer derivirten stetig, so hat das um den Rand dieses Gebietes herum erstreckte Integral

$$\int f(z)\,dz$$

den Wert 0 — wobei aber das Gebiet auch mehrfach zusammenhängend sein darf.“ (Vergl. etwa Figg. 42.)

Bei einer genauen Prüfung jener Beweise hierfür, wie sie zu bilden wären nach Analogie der für ähnliche, einfachere, Sätze üblichen Beweismethoden, findet sich, dass nicht alle jene Methoden für obige allgemeine Fassung verwendbar wären — mögen sie auch strenge sein für obigen Satz ohne seine Schlussworte.

So lange jenes Gebiet einfach zusammenhängend ist, kann man für den Nachweis obigen Satzes zwei ganz verschiedene Wege einschlagen. Und zwar ist der erste die bekannte Umwandlung des Kurvenintegrals in ein Flächenintegral. Für diese Methode ist es ganz unwesentlich, ob das Gebiet den Zusammenhang 1 oder einen höheren hat: durch die Voraussetzung, dass das Gebiet überall begrenzt ist, ist erreicht, dass

die bei der Zerlegung der Fläche auftretenden, den Koordinatenachsen parallelen, Streifen (Fig. 42 a) die Umgrenzungskurven wieder an derselben (inneren) Seite erreichen, von welcher aus sie geführt wurden*) — der Beweis bliebe also für begrenzte Gebiete von verschiedenem Zusammenhange wesentlich derselbe.

Diese Methode gestattet also eine Aussprache unseres obigen „Lehrsatzes" in seiner allgemeinen Fassung; dass die letztere in der citierten Litteratur nicht ausdrücklich gegeben ist, erscheint somit — da ja die Erweiterung nirgends durch die Beweismethode verhindert wäre — nicht wesentlich.

In der französischen Litteratur ist dagegen öfters für den entsprechenden — auf einfach zusammenhängende Flächenteile sich beziehenden — Satz eine andere Methode des Beweises beliebt, die der stetigen Umformung (Zusammenziehung) einer auf der Fläche gegebenen geschlossenen Kurve um einen Punkt herum (oder umgekehrt deren Erweiterung zum Rande).**)

Sollte unser oben gegebener allgemeiner Satz nach dieser zweiten Methode bewiesen werden, so wäre nach *Briot & Bouquet* etwa folgender Gedankengang zu versuchen: Markiert man man einen Punkt P innerhalb jenes Gebiets, so kann man von ihm aus eine Kurve sich stetig erweitern lassen, bis sie sich an den Rand vollständig anschliesst. Der Werth A des über diese Kurve hin erstreckten Integrals $\int f(z)\,dz$ ist eine Funktion des jeweiligen Abstandes δ der beweglichen Kurve vom Ausgangspunkte der Entwicklung, P. Es wäre dann zu zeigen, dass der Differentialquotient dieser Funktion nach der Entfernung δ, $\frac{\partial A}{\partial \delta}$, allenthalben 0 ist, so dass die Funktion A für den Rand verschwindet, da sie für den Ausgangspunkt, d. h. $\delta = 0$, verschwindet. Aber diese Schlussweise wäre a priori

---

*) *Neumann,* Riemanns Theor. d. Abel'schen Funkt., 2. Aufl., pag. 8, 19. — *Durège,* El. der Theor. der Funktionen, 2. Aufl., p. 72, 77. — *Königsberger,* Vorles. über die Theor. d. ellipt. Funkt., p. 67, 73.

**) *Briot* & *Bouquet,* Théorie des fonct. ellipt., 2me éd., numéro 82, pag. 128; vergl. auch insbesondere *Remarque*, am Schlusse p. 133. Ferner *Laurent,* théorie des élément. des fonct. ellipt., in *Sturms* Cours d'Analyse, 6me éd. 1880, pag. 444, wo die Kurve nicht zusammengezogen, sondern verschoben wird.

für die Kurve S der Figur 42 nicht mehr anwendbar, weil eben dann das betrachtete Gebiet gar nicht mehr durch Erweiterung einer Kurve von einem Punkte aus dargestellt werden kann. (Diese Methode genügt für höheren Zusammenhang des Gebietes nur in der sehr speziellen Voraussetzung noch, dass das mehrfach zusammenhängende Gebiet zufällig genau so viele Randkurven hätte, als möglich, d. h. als seine Zusammenhangszahl ergiebt; in diesem speziellen Falle kann man sich durch Zerschneiden des Gebiets in ein einfach zusammenhängendes weiter helfen, aber die Beweismethode ist damit eben durchaus noch nicht auf unsere „Verallgemeinerung" anwendbar geworden.) Demnach enthielte ein Lehrgang, der nur die Methode der „Variation einer Kurve" zu verwenden gedächte, insofern eine Lücke, als diese Beweismethode nicht ausreicht, wenn man das zu untersuchende Gebiet voraussetzt als mehrfach zusammenhängend und gleichzeitig nicht von der grösstmöglichen Randkurvenzahl begrenzt.

Beispielsweise ist (Fig. 42 a, b)

$$\int_S \sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)(x-\varepsilon)(x-\zeta)}^3 = 0,*)$$

wenn die 6 bezeichneten Stellen der Figur 42 mit den obigen 6 Zahlen $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta$ zusammenfallen — ein Resultat, welches aus der ersten Beweismethode (Reduktion auf ein Flächenintegral) direkt und ohne Schwierigkeit folgt, für welches aber die zweite Methode (Variation des Integrationswegs) keine Ableitung liefert.

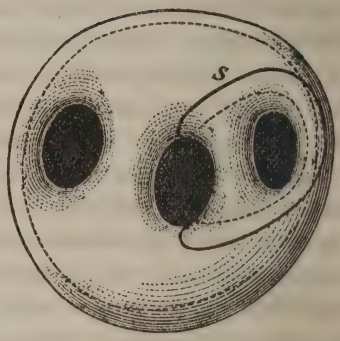
10.

Die Figur 44 zeigt eine solche Kurve S, welche also „ein Stück der Fläche vollständig begrenzt und doch nicht in einen Punkt zusammengezogen werden kann"; der weitere Vergleich

*) Die dritte Potenz der Quadratwurzel wurde gewählt, um in Uebereinstimmung zu bleiben mit den Voraussetzungen der französischen Schriftsteller, wonach nicht nur die Funktion selbst, sondern auch deren Derivirte im betrachteten Bereiche stetig sein sollen.

mit der später folgenden Fig. 63 lässt erkennen, wie man auf „Normalflächen“ solche Kurven systematisch aufzustellen im stande ist.

Fig. 44.



(Wie das abgeschnittene Flächenstück identisch ist mit einem Ringe, mit einer einzigen kleinen Randkurve — punktirter Ring —, mögen die Figuren 45—48 erläutern.)

Indem wir die Oeffnungen der Figur 44 sich verengern und schliesslich unendlich nahe sich zusammenziehen lassen zu „Selbstberührungskurven“, er-

Fig. 45.

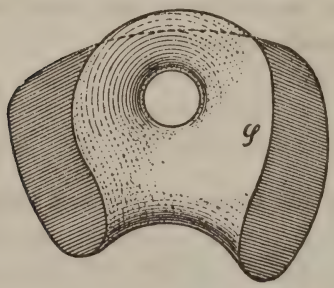


Fig. 46.

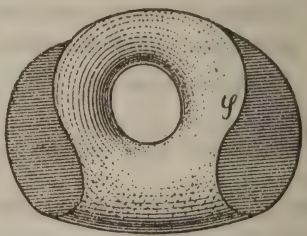
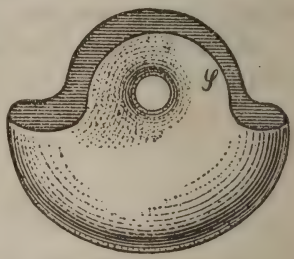


Fig. 47.

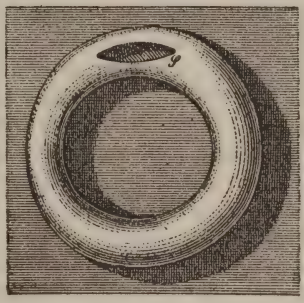


halten wir die Figur 49. Ein Umstülpen um die Aequatorkurve R der Fläche II in der Richtung der Pfeile bei A und B lässt auch die auf II verlaufenden Teile der Kurve S ihre Lage ändern, wie es Fig. 50 zeigt. Die Umwandlung dieser „*Riemann*schen Fläche“ in die gewöhnliche Form (Figg. 42) löst schliesslich vollständig die uns im vorigen Paragraphen gestellten Aufgaben.

Man kann aber auch den in Fig. 44 auf der Fläche I verlaufenden (sichtbaren) Teil der Kurve S um die Kugel (hinten) herumführen, bis derselbe links wieder sichtbar wird; diese Operation ist offenbar möglich, da ja dabei keine der Oeffnungen überschritten wird.

Demnach ist die so erhaltene Figur 51 topologisch identisch mit 44. Sie bietet aber bei der Umwandlung in eine „*Riemann*sche Fläche" Anlass zu einer dem ersten Anblicke nach etwas von Figur 42 verschiedenen Anordnung. Aber auch auf der „*Riemann*'schen Fläche" 42 und 52 ist in topologischem Sinne die eingezeichnete Kurve *S* mit sich identisch geblieben — wie man auch direkt ersehen könnte, wenn man den links gezeichneten Teil *A* der Kurve *S* in Figur 52 über den Unendlichkeitspunkt des ersten Blattes hinweg gleiten lässt, bis das ganze Stück *BAC* auf der rechten Seite der Figur 52 wieder zum Vorschein kommt.*) Vergl. die ausführliche Darstellung dieses Verschiebungsprozesses § 5, Anmerkung 1.

Fig. 48.



Anmerkung 1. Wir fügen, ohne dass es für den Zusammenhang wesentlich wäre, noch einige Figuren hinzu, welche den Uebergang der „punktierten" Ringfläche 48 versinnlichen sollen in das von *Riemann* gegebene Beispiel einer „Fläche höheren Zusammen-

Fig. 49.

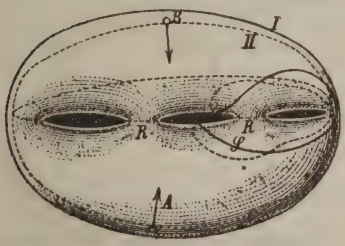
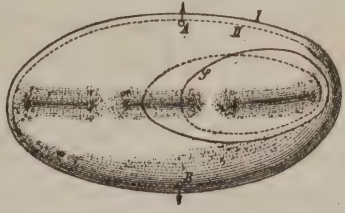


Fig. 50.



*) Bei diesen komplicierteren Figuren 52, (58) ist, im Falle einer Anwendung auf Funktionen-Theorie, deswegen grössere Vorsicht geboten, weil dieselben Gebiete darstellen, die einen „Unendlichkeitspunkt" enthalten. Ihre Ableitung wurde nur eingefügt wegen ihrer topologischen, gestaltlichen Beziehungen — dagegen sind die auf Figg. 42 (sowie später Fig. 65) angewandten functionen-theoretischen Betrachtungen durchaus nicht ohne weiteres auf die Figuren 52 (58) direkt übertragbar.

hangs, mit einer einzigen Randkurve“ (Fig. 53). Es mag immerhin in den Rahmen unserer Untersuchungen passen, wenn wir gerade diese, beim Studium der *Riemann*'schen Theorie zuerst entgegentretende, also gewissermassen historische, Fläche*) ausführlicher besprechen.

Wir geben der kleinen Oeffnung des Ringes Fig. 48 die schlitzförmige Gestalt der Fig. 54; alsdann erweitern wir diesen Schlitz, indem wir von der äussersten Umhüllung rechteckige Streifen hinwegnehmen, die, parallel mit dem Schlitze verlaufend, sich von der Kurve ω bis zur Kurve ω' erstrecken (beispielsweise mit dem Streifen $ABCD$ beginnend). Da wir in diesem Prozesse nur soweit gehen dürfen, dass niemals ein Zerreissen eintritt, so müssen wir (Fig. 55) schliesslich eine Brücke übrig behalten (aus der dann eine Verbreiterung umgekehrt die Fläche 54 liefern würde). Oeffnet man die untere Partie der Figur 55 nach aussen hin, zieht aber gleichzeitig die obere

Fig. 51.

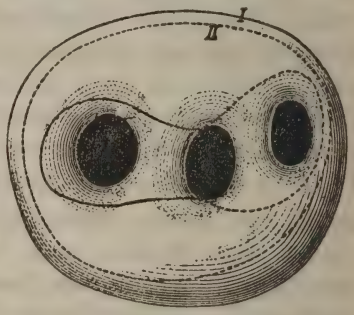
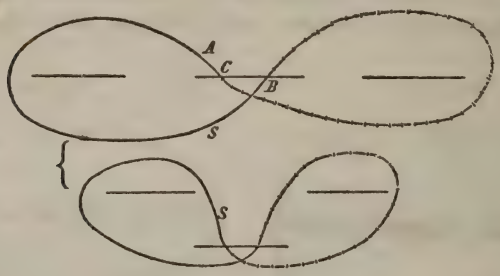


Fig. 52.



Partie nach innen zusammen, so erhält man eine Kreisfläche mit einer Oeffnung in der Mitte, aber derart, dass von der inneren Oeffnung bis zum Rande die Verbindung noch bestehen bleibt (56 α).

Diese Brücke ist von verschiedener Farbe mit der Kreisfläche selbst. Führt man die Brücke, das eine Ende fest haltend, mit dem andern Ende auf dem äussern Rande gleitend, längs

*) *Riemann*, Werke pag. 89.

Fig. 53.

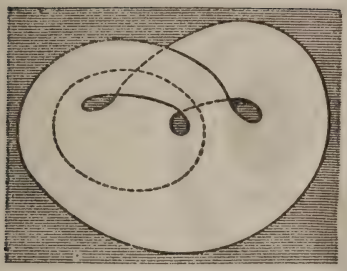
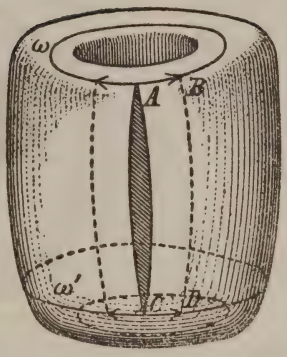


Fig. 54.



diesen weiter, so erleidet die Brücke dabei eine solche Drehung, dass schliesslich, in der Lage Fig. 56 β angelangt, die Brücke ihre ungefärbte Seite nach oben kehrt und die Fig. 53, die wir erhalten wollten, erreicht ist.

Anmerkung 2. In Figur 57 ist noch ein anderer Fall gezeichnet, wo ein geschlossener Faden S einen Teil der Doppelfläche abgrenzt, welcher aber gleichzeitig nicht in einen Punkt verwandelt werden kann. Durch Anwendung unserer Methoden ist es nicht schwierig, sich die entsprechende Figur auf der *Riemann*'schen Fläche mit drei Verzweigungsschnitten herzustellen. Man erhält so die Figur 58, welche wiederum eine begrenzende, aber nicht zusammenziehbare Kurve S enthält. (Wegen der Anwendbarkeit auf Functionentheorie vergl. die Note pag. 35.)

Fig. 55.

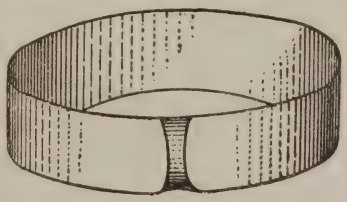


Fig. 56.

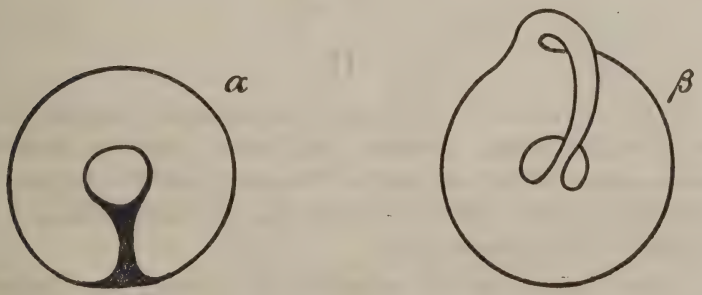


Fig. 57.

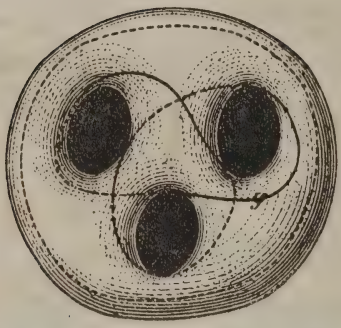
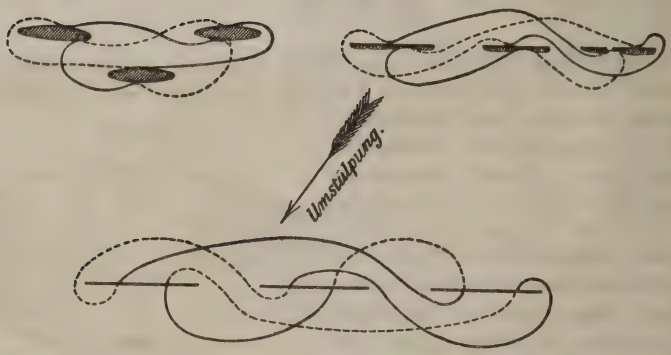


Fig. 58.



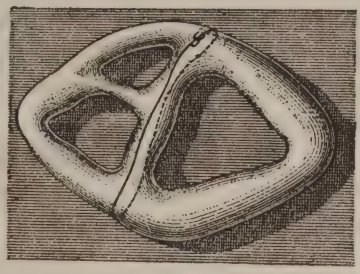
11.

Um an einem Schluss- und Hauptbeispiele unsere vorgetragenen Methoden sämtlich noch einmal durchzugehen und insbesondere die in der vorigen Nummer gestellte Aufgabe für eine Fläche von höherem Geschlechte zu lösen, wurden die Figuren 59 — 69 entworfen.

Die Figuren 59—63 enthalten die Lösung der Aufgabe: die Fläche der Figur 59 (sie ist identisch mit der dreimal gehenkelten Kugel der Figur 61) in eine unserer Normalflächen (Fig. 63) zu verwandeln.

Die Figuren 64 und 65 lösen die Aufgabe: diese Normalfläche durch stetige Verzerrung in eine *Riemann*'sche Fläche überzuführen. [Die Figuren 66—69 lösen die Aufgabe: jenes von einer Randkurve begrenzte Stück der vorgegebenen Fläche, welches die Kurve S ausschneidet, in 59 oder 60, in eine punktierte *Riemann*'sche Fläche zu verwandeln.]

Fig. 59.



a) Um zunächst die Figur 59 in eine etwas regelmässigere Gestalt zu bringen, können wir entweder die Verbindungsröhren so verschieben, dass sie alle einen gemeinschaftlichen Anfangs- und Endpunkt aufweisen (Fig. 60), in welchen sich alle röhrenförmigen Verbindungsstücke vereinigen; indem man nun in Fig. 60 die zweite Verbindungsröhre nach vorn biegt und gleichzeitig die dritte nach rückwärts, entsteht als Aufriss der Fig. 60 — betrachtet in der Richtung von A nach B — die Kurve 62, und eine Ausbildung eines der 4 Halbringe dieser Figur bis zum Umfange einer doppelblättrigen Hohlkugel führt dann auf die Figur 63.

Fig. 60.

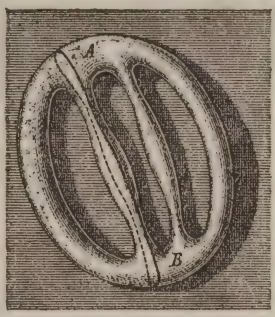
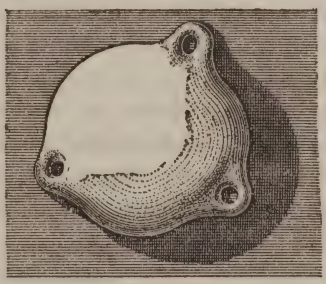


Fig. 61.



Oder man verfährt so: wir denken uns die mit deutlicher Wölbung, Rundung, gezeichnete Fläche Fig. 59 abgeflacht zu einer doppelt gelegten Ebene, deren beide Blätter längs dreier Kurven und einer äusseren Randkurve zusammenhängen (ähnlich wie Figur 40). Eine Umformung dieser Fläche zu einer Kugel lässt wieder zu den drei direkt sichtbaren Oeffnungen noch eine vierte als gleichberechtigt hinzutreten. (Vgl. § 8.)

b) Auf der Fläche der Figur 63 ist eine jener „begrenzenden, aber nicht zusammenziehbaren" Kurven, *S*, leicht zu erkennen; wie Alles auf die „*Riemann*sche" Fläche Figur 65 sich abbildet, folgt unmittelbar aus der geometrischen Anschauung.

Fig. 62.

c) Um das ausgeschnittene Gebiet in eine (berandete) *Riemann*'sche Fläche zu verwandeln, zeichnen wir in Figur 66 dessen Umfang für sich und erkennen durch die Analogie

Fig. 63.

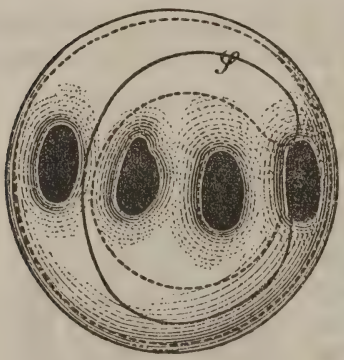
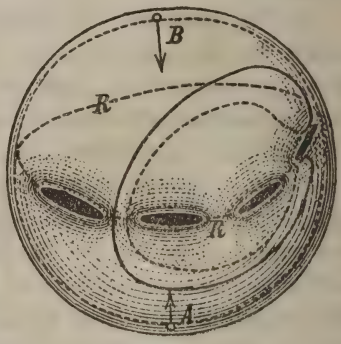


Fig. 64.



dieser Figuren mit 45 — 48, dass dieselbe Fläche auch aufgefasst werden kann als eine Fläche vom „Dreihalbring-Typus" mit kleiner Oeffnung (Figur 67). Diese Fläche in eine (ausnahmsweise berandete) *Riemann*'sche Fläche zu verwanwandeln, wurde früher gelehrt (Paragraph 7); Figur 68 enthält die zugehörige Zwischenform, die einen Uebergang vermittelt zur vorgegebenen Figur 66 einerseits, anderseits durch Umstülpung identisch wird mit der *Riemann*'schen Fläche mit Verzweigungsschnitten der Figur 69.*)

Fig. 65.

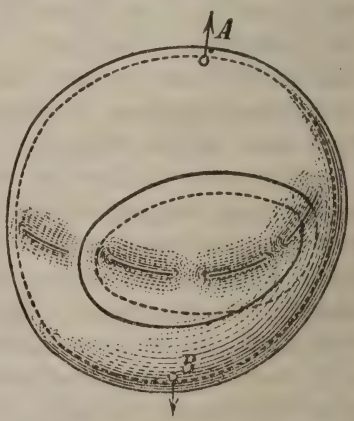


Fig. 66.

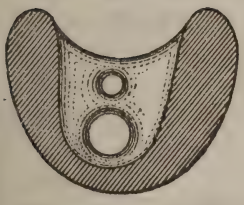


Fig. 67.

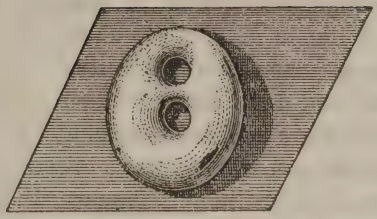


Fig. 68.

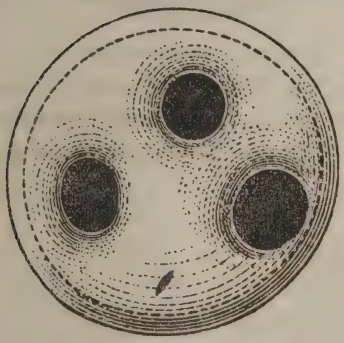
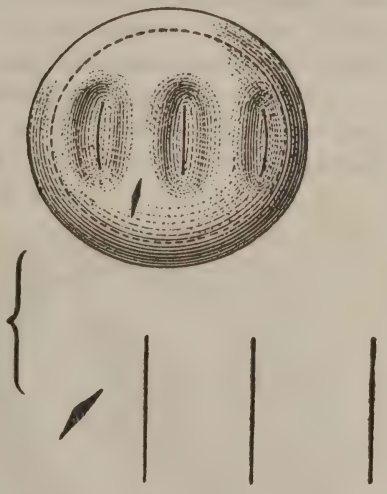


Fig. 69.



12.

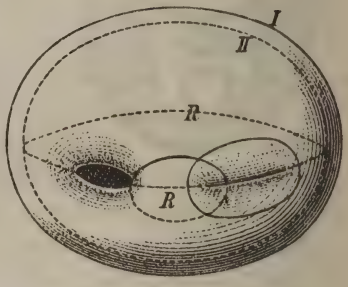
Die Verwandlung einer beliebig vorgegebenen unbegrenzten, zweiseitigen, Fläche in eine *Riemann*sche Fläche.

Ehe wir zum eigentlichen Gegenstande dieses Paragraphen schreiten, sei noch mit wenigen Worten der „einseitigen" Flächen gedacht. Es sei bemerkt, dass auch für die einfacheren Fälle von solchen Flächen die Reduktion auf eine unseren „Normalflächen" analoge Form nicht schwierig ist, wie die Figuren 70a und 70b erweisen mögen. Letztere Fläche besitzt offenbar keine zwei verschiedene Seiten; denn ein Ueberzug mit Farbe,

*) Auf Fig. 65 sind die für Figg. 42 gewonnenen functionen-theoretischen Sätze — nach entsprechenden Modificationen — übertragbar.

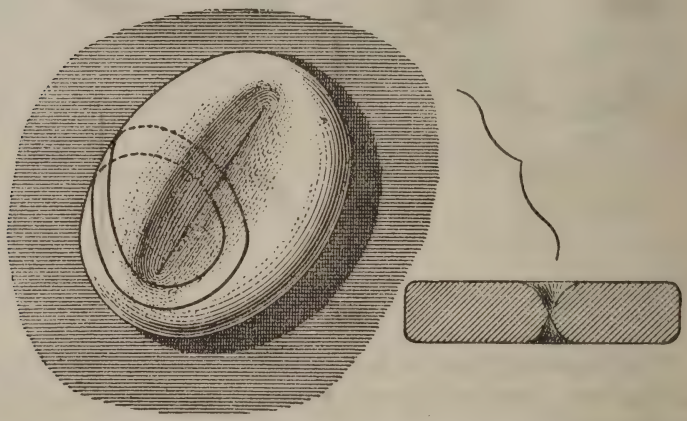
der die äussere Seite bedeckt, würde durch die Selbstdurchdringungskurve auch in das Innere hinein geführt. Schneidet man einen Streifen in der Weise aus der Fläche heraus, wie es die Figur 70 b angiebt, so erhält man wieder den „einhalbmal gedrillten“ Papierstreifen (*Neumann*, a. a. O., 2. Aufl., pag. 167—168), der natürlich mit der vorgegebenen Fläche die Eigenschaft teilt, nur eine Seite zu besitzen.

Fig. 70 a.



Durch Umbiegung des Randes von Figur 70 b erhält man 70 a, welche Figur in der That Aehnlichkeit mit einer unserer „Normalflächen“ aufweist, und an welcher insbesondere deutlich hervortritt, dass sich die Selbstdurchdringungskurve diesmal auch durch die sonst so wirksame Operation der „Umstülpung“ nicht entfernen lässt.

Fig. 70 b.



(Ohne auf die Klassifikation dieser Flächen näher einzugehen, teilen wir noch zwei einfache, hierher gehörige, Sätze mit:

„Jede unbegrenzte Fläche ohne Selbstdurchsetzungskurve ist zweiseitig; oder auch: jede einseitige Fläche muss wenigstens eine solche Kurve aufweisen.“

„Dieser Satz ist nicht umkehrbar: es giebt unbegrenzte

zweiseitige Flächen mit Selbstdurchsetzungskurven, beispielsweise die *Riemann*'schen Flächen.")

Wir nehmen nunmehr, indem wir alle weiterhin vorkommenden Flächen als zweiseitig gegeben voraussetzen, den Faden unserer Untersuchungen wieder auf, um die eingangs gestellte Aufgabe zu lösen: die Umformung jeder beliebig gestalteten, aber unbegrenzten Fläche in eine *Riemann*'sche zweiblättrige Fläche durch stetige Verzerrung durchzuführen.*)

Es wird uns nicht erspart bleiben, einige Konstruktionen und Sätze vorauszuschicken.

I. Als Erklärung einer „Henkelkonstruktion" geben wir das folgende: Man nehme auf einer unbegrenzten Fläche 2 verschiedene geschlossene Kurven, α β, welche sich beide auf einen Punkt zusammenziehen lassen müssen, demnach — jede Kurve für sich — zwei Flächenstücke (α und β) von einfachem Zusammenhang begrenzen. Man verbinde hierauf — nachdem man die Stücke α und β aus der Fläche entfernt hat — in stetiger Aufeinanderfolge die sämtlichen Punkte der Randkurve α mit sämtlichen Punkten von β durch — im Raum — stetig aufeinander folgende Linienzüge. Alle diese Linienzüge erfüllen eine Fläche, welche wir benutzen, um die Randbegrenzungen der vorgegebenen Fläche verschwinden und letztere also wieder unbegrenzt zu machen. [Wenn ein Sinn angegeben ist, nach welchem bei dieser Konstruktion von Verbindungszügen die Kurve α durchwandert werden soll, so ist der Sinn der Reihenfolge der entsprechend zu wählenden Punkte auf β entscheidend für die Frage: „ob nicht vielleicht durch die Konstruktion des Henkels die Farbenverteilung der ursprünglichen Fläche eine ganz andere wird?"]

Lehrsatz. „Durch das Aufsetzen eines Henkels auf eine unbegrenzte, beliebig gestaltete Fläche F wird deren Zusammenhangszahl um zwei Einheiten vermehrt."

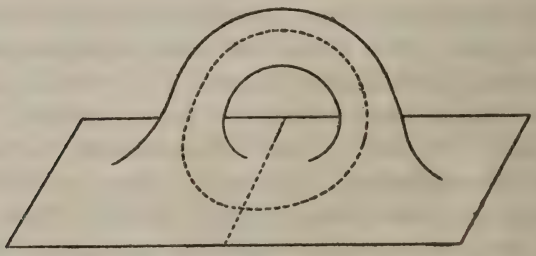
---

*) Vergl. die von *C. Jordan* gegebene Durchführung desselben Problems (*Lionville's* Journal, ser. 2 [1866]), die sich übrigens in ihrem Gedankengange wesentlich unterscheidet von der hier gegebenen.

Ebenso ist die pag. 22 citierte Abhandlung von *Clifford* hier nochmals zu erwähnen. Daselbst findet sich auf pag. 292—301 eine weitere Lösung derselben Aufgabe. Sie stützt sich auf zwei von *Lüroth* und *Clebsch* gegebene Sätze über mehrblättrige *Riemann*'sche Flächen.

Beweis. Hat die Fläche den Zusammenhang p, so genügen $p-1$ Querschnitte, um dieselbe in eine einfach zusammenhängende mit einem Rande zu verwandeln. Wir denken uns diese Querschnitte ausgeführt und können annehmen, dass dieselben den am Schlusse erst aufgesetzt gedachten Henkel umgehen. (Diese Vorstellung ist immer erlaubt: wir denken uns, um zu wiederholen, die Querschnitte vor dem Aufsetzen des Henkels ausgeführt und finden schliesslich für letzteren immer noch Raum.) Nach dem Aufschneiden der Fläche längs dieser Querschnitte haben wir dann die Figur (71) einer be-

Fig. 71.

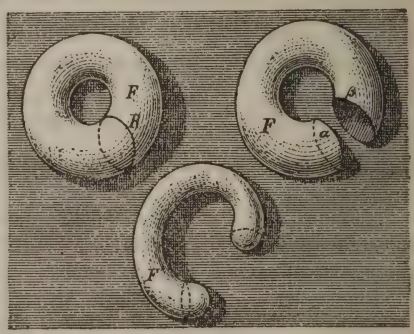


grenzten Ebene mit einem Henkelaufsatz, und es genügen zwei Querschnitte, um diese Fläche (identisch mit dem punktierten Ringe der Figur 48) in ein Rechteck zu verwandeln.

II. Als weitere wichtige Konstruktion geben wir die „Wegnahme eines Henkels".

Es sei R ein auf einer Fläche (von höherem als einfachem Zusammenhang) F gegebener, nicht zerstückelnder Rückkehrschnitt.*) Wir trennen die Fläche längs R auf und unterscheiden die Ränder α und β von R nach dieser Operation — Figg. 72 a und b. Hierauf schliesse man die Randöffnung α, welche die Fläche F nunmehr aufweist, sofort wieder durch ein Flächenstück von einfachem Zusammenhange (Kugel-

Fig. 72 a.



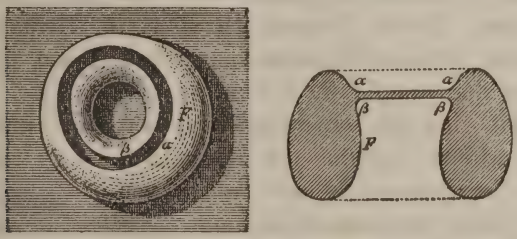
*) *Neumann*, a. a. O., 2. Aufl., pag. 149.

haube); ebenso die Randöffnung β durch ein eben solches Stück von einfachem Zusammenhang. Wir erhalten so eine neue Fläche F', die wiederum unbegrenzt ist, wie F selbst; diese Fläche F' hat einen um zwei Einheiten niedrigeren Grad des Zusammenhangs als F.

Beispiel 1 (Fig. 72 a). Ein Ring wird längs R aufgeschnitten. Die beiden Oeffnungen werden wieder geschlossen durch Halbkugeln. Die neu entstandene Fläche ist vom Zusammenhange $3 - 2 = 1$.

Beispiel 2 (Fig. 72 b). Ein Ring wird längs $\alpha\beta$ aufgeschnitten. Jede der Oeffnungen α und β wird mit einer Ebene

Figur 72 b.



geschlossen; es entsteht eine Fläche, welche die Figur im Durchschnitt zeigt. Die entsprechende Fläche zu F ergiebt sich, wie vorhin, als unbegrenzt und vom Zusammenhange $3 - 2 = 1$.

(R ist auf dem Ringe von 72 a eine Meridiankurve, auf 72 b ist $\alpha\beta$ eine Breitenkurve. Es mag auf den ersten Blick paradox erscheinen, wenn wir behaupten, dass die beiden Zerschneidungen von 72 a und 72 b eigentlich gar nicht unterschieden werden sollten und, genau denselben topologischen Prozess bildend, zum nämlichen Resultate führen müssen.

Die Erklärung liegt in der Bemerkung, dass wir es [vgl. die Einleitung] ganz in der Hand haben, die Seite einer Fläche als „äussere“ oder „innere“ zu betrachten. Man denke sich in beiden Figuren den Raum leer an der vom Beschauer unwillkürlich „innen“ genannten Seite, dagegen Materie an der „aussen“ gelegenen Seite; dann bildet der Raum selbst einen körperlichen Ring, in Bezug auf welchen die Kurven $\alpha\beta$ in Figur 72 b Meridiankurven sind, dagegen dieselben Kurven in Figur 72 a Breitenkurven vorstellen. — Leicht ist diese Vor-

stellung nicht, da wir nicht geübt sind, uns die Materie bis zum unendlich fernen Punkte des Raumes sich erstreckend zu denken.)

Es sei bemerkt, dass diese Operation der „Henkelentfernung“ ebenfalls die Verteilung der Färbung auf der Fläche beeinflussen kann*) wie der vorhin genannte umgekehrte Prozess des „Henkelaufsetzens“.

Wir kommen nunmehr zum Beweise der oben gemachten Bemerkung über die so bewirkte Herabsetzung der Zusammenhangszahl: die Fläche F entsteht aus F' dadurch, dass man F' mit zwei Oeffnungen, α und β, versieht und hierauf einen Cylinder, eine Röhre, durch die beiden Ränder von α und β als Leitkurven hindurch gehen lässt, um die Fläche wieder zu schliessen. Dieser Vorgang ist aber ein „Henkelaufsetzen“ — demnach ist der Zusammenhang von F um 2 Einheiten grösser als der von F', w. z. b. w.

Hiermit sind die Operationen beschrieben und in ihrer Wirkung erklärt, welche die Reduktion einer beliebig vorgegebenen, unbegrenzten und zwei Seiten besitzenden Fläche auf eine einfach zusammenhängende gestatten, sowie, wie wir gleich sehen werden, die *Riemann*'sche Fläche der vorgegebenen Fläche konstruieren lehren. —

Wir vermindern den Zusammenhang der vorgegebenen Fläche durch Anwendung der „Henkelentfernung“ successive um 2 Einheiten, bis wir keinen Rückkehrschnitt mehr finden, der nicht zerstückelt. Dann sind wir bei der einfach zusammenhängenden Fläche der Kugel angelangt. Von dieser Fläche ausgehend können wir nun einmal die vorgegebene Fläche F wieder rückwärts konstruieren unter fortwährender Anwendung des Hilfssatzes der „Henkelaufsetzung“.

Aber hierbei machen wir noch von folgendem Satze Gebrauch:

„Eine Fläche, die durch successives Aufsetzen von Henkeln gebildet wird, behält ihren topologischen Charakter vollständig

*) d. h.: die Eigenschaft der Fläche umändern kann bezüglich der Frage, ob sie eine einzige oder zwei verschiedene Seiten hat. Die „Henkelentfernung“ kann, um genauer zu sprechen, möglicherweise eine unilaterale Fläche in eine bilaterale Fläche verwandeln — übrigens nicht umgekehrt.

unverändert bei — in welcher Art auch die Henkel aufeinander aufgesetzt werden, wenn nur beim Aufsetzen jedes Henkels die Farbenverteilung der Fläche nicht gestört wird"; d. h. es genügt — um den Zusammenhang und alle singulären Kurven einer Fläche anzugeben — zu wissen, wie oftmal ein Henkel auf frühere aufgesetzt worden sein soll, nicht wo das geschehen ist. Denn denken wir uns eine Fläche, gebildet von lauter auf einander gesetzten und sich durchkreuzenden Henkeln; lässt man einen davon beweglich sein, so dass seine Endstellen, wo er mit der Fläche zusammenwächst, beliebig diese Fläche entlang bewegt werden können, so kann diese Bewegung an keiner Stelle die Wirkung haben, dass die mit dem Henkel stetig sich verschiebenden Kurven auf der Fläche jemals aufhörten, zusammenziehbar zu sein, ein Gebiet zu begrenzen, ein Querschnittsystem zu bilden u. dgl.

Eine möglichst deutliche Vorstellung der vollen Bedeutung der „stetigen Bewegung" vermag wohl besser als jede Erklärung diesen Satz glaubhaft zu machen: wenn sich zwei Flächen stetig deformieren, so ist auf dem ganzen, endlichen Wege, den sie zurücklegen — durch unendlich kleine Veränderungen weiter schreitend —, keine Stelle angebbar, wo etwa beispielsweise das der Bewegung folgende vollständige Querschnittsystem plötzlich aufhörte ein solches System weiter vorzustellen. Mit Hilfe der dritten Voraussetzung der Einleitung ist es klar, dass wir einer Fläche durch stetige Umänderung ausser den — unwesentlichen — Selbstdurchdringungskurven gar keine topologischen Singularitäten geben könnten, selbst wenn wir wollten.

Beispiel (Figur 73). Die Figur hat den Zusammenhang $2(9-1)+1=17$. Sie entstand aus Figur 74, welche vier Halbringe zeigt, zunächst durch Anfügung von vier Henkeln, *a b c d*, sowie schliesslich noch einem fünften, x. Diese Fläche 73 kann nun erklärt werden als eine Kugelfläche x, kompliciert durch 2 mal 4 Henkel, von welchen die letzten vier gar nicht mehr ohne weiteres mit der Kugel x in Zusammenhang stehen, sondern früher gegebene Henkel paarweise verbinden. Hier darf man also beispielsweise die Endpunkte des Henkels *b*, *C* und *B*, bis an die Enden *D* und *E* verschieben. Verfährt

man entsprechend mit den andern vier zuletzt erwähnten Verbindungshenkeln, so erhält man die Anordnung der Figur 75, welche direkt als Kugel x mit acht regelmässig gruppierten Henkeln gedeutet werden kann.

Fig. 73.

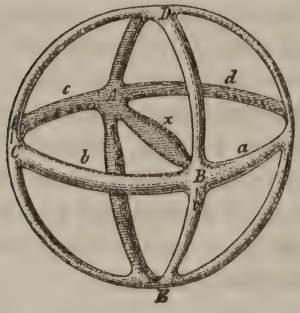


Fig. 74.

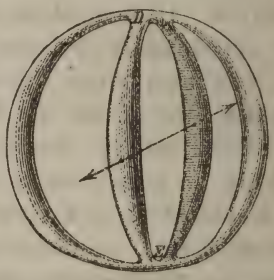


Fig. 75.

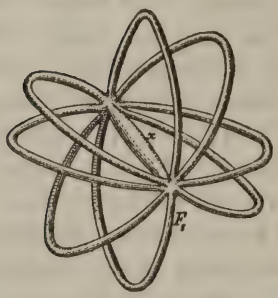


Fig. 76.

(Nach dem Vorhergehenden zeigt Figur 75 dasselbe Verhalten in topologischer Hinsicht, dasselbe Geschlecht, denselben Zusammenhang wie Fig. 73 — alle auf 73 angebbaren Kurven finden sich auf Fig. 75 in derselben Lage zur Fläche wieder.)

Wir halten nun alle bis jetzt gewonnenen Resultate neben einander: einerseits kann eine beliebig vorgegebene Fläche aus einer Kugel (rückwärts) aufgebaut werden durch Henkelaufsetzungen, in derselben Reihenfolge, wie sie aus der Auftrennung der Henkel her bekannt ist. So erhalten wir erstens einmal durch das Wiederschliessen der Trennungsöffnungen die vorgegebene Fläche kongruent mit sich selbst.

Wir können aber nach dem oben Gesagten dieser Entwicklung von F aus einer Kugel die Herstellung einer regelmässigen Fläche F_1 vom Halbringtypus (Figur 75) parallel gehen lassen und können hiermit, wenn wir wollen, die Herstellung einer „Normalfläche N“ verbinden, welche so viele Verbindungsöffnungen zeigen wird, als die Figur (75) der Halbringbildung Halbringe zeigt (der mittlere Teil x ist bei dieser Abzählung gleichfalls zu einem Halbringe zu krümmen).

Diese Normalfläche ist also identisch mit F_1; sie braucht blos umgestülpt zu werden, um die zweiblättrige *Riemann*'sche Fläche R mit 9 Verzweigungsschnitten als Lösung der uns eigentlich gestellten Aufgabe zu liefern, welche in der Umwandlung der Fläche 73 in eine *Riemann*'sche Fläche bestand.

Der Schematismus für diesen Schluss und diese Lösung ist der folgende gewesen:

Gegeben F; Anzahl der Henkelauftrennungen: 8.*) Entwicklung der Kugel durch 8 Aufsetzungen liefert { F (identisch), F_1 (Figur 75).

Nun ist $F \equiv F_1$ (nach früheren Sätzen),

$F_1 \equiv N$ (Normalfläche),

$N \equiv R$ (*Riemann*'sche Fläche);

daher: $F \equiv R$, wobei das Zeichen $\equiv$ die Bedeutung hat von: „durch stetige Verzerrung erhältlich aus“.

In der Praxis ist ein so umständliches Verfahren nicht zu empfehlen, insbesondere kann man die Bestimmung der „Henkelauftrennungen“ meistens ganz ersparen. Das Vorhergehende sollte eben nur den allgemeinen Nachweis geben, dass jede — beliebig vorgegebene — unbegrenzte Fläche mit 2 verschiedenen Seiten identisch gemacht werden kann mit einer zweiblättrigen *Riemann*'schen Fläche (Fläche mit Verzweigungsschnitten), — will aber keineswegs die Methode liefern, um für jeden speziellen Fall auf rascheste Weise diese Identität evident zu machen.

Am einfachsten wäre es wohl hier (Fig. 73), die 4 Henkel $a\,b\,c\,d$ so zu drehen, dass die Figur 75 entsteht. Diese Figur, F_1, ist identisch mit F, weil die Umwandlungsoperation, die

*) Figur 76 wurde entworfen, um die 8 Henkelauftrennungen zu zeigen.

Drehung der 4 Verbindungshenkel, nur eine stetige Verzerrung ist. Daher direkt

$$F \equiv F_1.$$

Krümmt man noch den mittleren Teil x zu einem Halbringe, so erhält man 9 als eine für F besonders charakteristische Zahl. Aus den 9 Halbringen werden die 9 Oeffnungen der ‚Normalfläche", aus diesen entstehen die 9 Verzweigungsschnitte des Schlussresultats.

Zusammenfassung: „Es existiert eine allgemein anwendbare Methode der Betrachtung, deren Besitz uns erlaubt, nicht nur die Identität jeder vorgegebenen unbegrenzten und doppelseitigen Fläche mit einer *Riemann*'schen doppelblättrigen Fläche mit Verzweigungsschnitten zu erweisen — sondern auch gleichzeitig alle Mittel liefert, um die stetige Deformation der vorgegebenen Fläche in die spezielle *Riemann*'sche Flächenform systematisch auszuführen. Aber es empfiehlt sich nicht für jeden einzelnen Fall diese allgemeine Methode anzuwenden, welche vielmehr nur ersonnen ist, um den Nachweis jener Identität wissenschaftlich festlegen zu können. Wie man in speziellen Fällen rasch zum Ziele gelangt, muss die Vorstellungskraft des Geometers entscheiden."

Um die Wurzeln einer Gleichung wirklich zu bestimmen, wird man nicht jenen Weg einschlagen, auf welchem die Existenz der Wurzeln bewiesen wird.

Druck von Ehrhardt Karras, Halle a. S.

G.E.STECHERT
& Co.
NEW YORK

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
515.223H67M C001
METHODIK DER STETIGEN DEFORMATION VON ZW
3 0112 017127819